**Lycée Sainte-Geneviève** **2024-2025**
**PCSI 1 - Mathématiques**

# Programme de la colle n$^{\text{o}}$ 21

**Semaine du 7 au 12 avril 2025**

## Analyse asymptotique

- Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$.
- Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles $o$ et $O$.

## Développements limités

- Définition, partie régulière, unicité, troncature.
- Propriété des développements limités des fonctions paires et impaires.
- Développement limité et continuité : $f$ possède un développement limité à l'ordre 0 en $a$ si et seulement si $f$ est continue (ou prolongeable par continuité) en $a$.
- Développement limité et dérivabilité : $f$ possède un développement limité à l'ordre 1 en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable en $a$.
- Primitivation d'un développement limité.
- Formule de Taylor-Young.
- Développements limités usuels en 0 : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, ch, sh, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, Arctan et tan (à l'ordre 3).
- Opérations sur les développements limités : addition, multiplication par un scalaire, produit, composition (substitution), inverse à l'aide de la composition par $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$.
- Applications : au calcul de limites, à la recherche d'équivalents, à la recherche d'asymptotes, à l'étude de positions relatives tangente/courbe et asymptote/courbe.

## Représentation matricielle d'une application linéaire

- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
- Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E,F)$ (en ayant fixé un couple de bases).
- Écriture matricielle de $y = f(x)$ pour $x \in E, y \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Composition d'applications linéaires et produit matriciel.
- La matrice d'une application linéaire $f$ est inversible si et seulement si $f$ est bijective et dans ce cas son inverse est la matrice de la réciproque (dans les bases correspondantes).
- Matrice de changement de base. Définition, propriétés.
  Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau et image d'une matrice. Théorème du rang matriciel.
- Rang d'une matrice (défini comme le rang de la famille de ses vecteurs colonnes). Liens entre les notions de rang : d'une matrice, d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire.
- Rang d'un système linéaire.

---

## Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E,F)$.
- Écriture matricielle de $y = f(x)$ pour $x \in E, y \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Composition d'applications linéaires et produit matriciel.
- La matrice d'une application linéaire $f$ est inversible si et seulement si $f$ est bijective et dans ce cas son inverse est la matrice de la bijection réciproque (dans les bases correspondantes).