Table des matières

Trigonométrie

Trigonométrie

I. Introduction

Le but de ce chapitre est double :

- tout d'abord, vous permettre d'acquérir les formules de trigonométrie, outil indispensable dans les premières années du supérieur, mais surtout vous montrer comment les assimiler et les connaître de façon sûre *sans les apprendre par cœur* mais en ayant les moyens de pallier toute défaillance de la mémoire grâce au développement d'un certain nombre d'automatismes ;
- ensuite, vous montrer à l'aide de cet exemple comment vous pouvez, en fin de secondaire, faire évoluer vos méthodes d'apprentissage de façon à aborder dans de meilleures conditions le choc de l'enseignement supérieur.

Premières remarques

- Ces formules ne doivent *pas être apprises par cœur.*
- Il ne faut pas croire non plus qu'il suffit de pouvoir en consulter une liste dans un quelconque formulaire ou dans la mémoire de sa calculette. Qui oserait affirmer qu'il est inutile d'apprendre le code de la route et qu'il suffit d'en avoir un exemplaire à portée de main pour le consulter lorsque le besoin s'en fait sentir ?
- *Il faut en apprendre le minimum et posséder le moyen de toutes les retrouver immédiatement par des considérations élémentaires.* Il y a dans ce chapitre quelques recettes pour vous aider à assimiler ces formules, mais les meilleures seront celles que vous trouverez par vous–même et qui vous paraîtront donc les plus naturelles.
    - Petite évidence : il ne s'agit pas d'apprendre ces recettes par cœur, ce qui ne ferait que déplacer le problème ! Vous devez assimiler la démarche à force d'utilisations, ce qui sera le cas si vous faites l'effort (ce qui ne paraît pas évident au début) de re-réfléchir les formules à chaque utilisation, en particulier déjà lors de l'étude de ce chapitre.
    - Ces recettes sont parfois redondantes : cela vous permettra évidemment de choisir celles qui vous conviennent le mieux ; mais, d'une façon générale, c'est une bonne politique que de multiplier les « instruments de contrôle ».

- Le meilleur moyen d'obtenir une formule exacte est de *connaître sa forme générale* et, parmi les formules similaires, de *savoir éliminer rapidement* celles qui ne conviennent pas.
- Le fait de *re-réfléchir* une formule à chaque fois que l'on en a besoin peut paraître constituer une « intolérable perte de temps et d'énergie » mais cela permet, à force d'utilisations répétées, de bien ancrer les quelques relations indispensables et surtout d'assurer l'ensemble des formules.
- Cette méthode peut à première vue paraître moins sûre qu'un apprentissage par cœur, et il est évident que sa mise en œuvre provoquera, au début, des erreurs que vous n'auriez pas commises si vous aviez appris ces formules par cœur ou si vous étiez allés voir dans un formulaire. Dites-vous bien qu'il en a été de même lorsque vous avez commencé à marcher : avant, vous rampiez ou vous marchiez à quatre pattes, le premier jour où vous avez essayé de marcher seulement sur vos deux jambes, vous êtes tombé, et ce ne fut certainement pas la seule fois. Toutefois vous avez persévéré et, aujourd'hui, la position verticale vous semble aller de soi : c'est à la même démarche que je vous convie en ce qui concerne l'apprentissage des mathématiques.

Cet exposé part volontairement du niveau élémentaire pour montrer comment les contenus vus dans les classes successives se complètent en généralisant les notions vues dans les classes antérieures.

Comment travailler ce chapitre ?

Comme vous pourrez vous en rendre compte, l'exposé qui suit est truffé d'exercices, certains vous permettant de tester votre niveau d'assimilation de ce que vous êtes en train de lire, d'autres consistant en des questions anodines attirant votre attention sur tel ou tel point de ce qui précède. *Il est essentiel de les traiter au fil de la lecture et de ne pas avoir peur d'y « perdre du temps »*. C'est ainsi que vous assimilerez en profondeur le contenu de ce chapitre.

Avant de commencer !

Vous pouvez lire ou relire <l'introduction> qui explique le but de ce travail.

Si nécessaire, voir aussi le <mode d'emploi> pour les liens <www>.

II. Définitions – Formules fondamentales

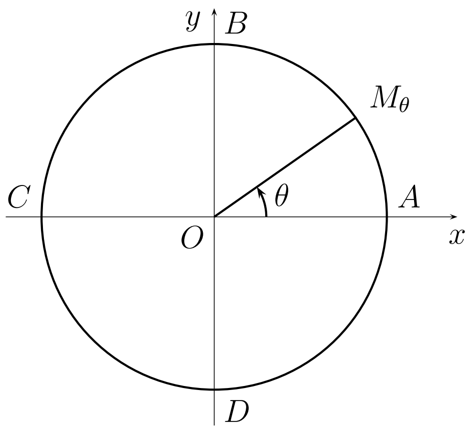
Les fonctions sin (sinus), cos (cosinus) ont une représentation naturelle à l'aide du *cercle trigonométrique* ou d'un *triangle rectangle*. On « voit » ainsi immédiatement de tête (mais il n'est pas honteux *au début* de faire un dessin) certaines propriétés de ces fonctions. Il serait dommage de s'en priver !

Il en est de même de la fonction tan *(tangente) qui n'est pas au programme de Terminale mais que nous allons quand-même introduire dans ce chapitre.*

1. Le cercle trigonométrique (indispensable)

Dans ce qui suit,

- le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les axes $(0, \vec{\imath})$ et $(0, \vec{\jmath})$ étant aussi respectivement notés Ox et Oy ;
- le cercle trigonométrique est le cercle Γ de centre O et de rayon 1, que l'on oriente dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- A est le point du plan de coordonnées $(1, 0)$.



Ainsi,

- pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ il existe un unique $M_\theta \in \Gamma$ tel que θ soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM_\theta}}\right)$, ce que nous écrirons plus rapidement $\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM_\theta}}\right) = \theta$;
- on peut donc définir une application, qui à tout réel θ associe le point M_θ, application que nous noterons dans toute la suite :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R} & \to & \Gamma \\ & \theta & \mapsto & \Phi(\theta) = M_\theta \end{array} \quad ;$$

- étant donné que la longueur de l'arc AM_θ est proportionnelle à la mesure de l'angle géométrique AOM_θ et que le périmètre de Γ vaut $2\,\pi$, on a évidemment la relation $\Phi(2\,\pi) = \Phi(-2\,\pi) = A$ et donc plus généralement :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \Phi(2\,k\,\pi) = A$$

ainsi que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \Phi(\theta + 2\,k\,\pi) = \Phi(\theta),$$

ce qui entraîne que *la fonction* Φ *est périodique et que* $2\,\pi$ *en est une période ;*
- pour tout $\theta \in \left]-2\pi, 2\,\pi\right[$, l'arc AM_θ a pour longueur $|\theta|$.

Remarque Comme ci-dessus, l'utilisation de lettres grecques telles que Γ (*Gamma*), θ (*theta*), Φ (*phi*), ..., est courante en mathématiques ; si vous n'êtes pas familier avec l'alphabet grec, je vous conseille de visiter <ce site>

Nous admettrons les résultats suivants, évidents sur le dessin, mais que nous ne pouvons pas justifier à ce niveau.

Proposition 1 (admis)

- Pour tout $M \in \Gamma$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \Phi(\theta)$, ce qui s'écrit aussi :

$$\forall M \in \Gamma \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \quad M = \Phi(\theta).$$

- Si $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, alors on a $M_{\theta_1} = M_{\theta_2}$, ou encore $\Phi(\theta_1) = \Phi(\theta_2)$, si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_2 - \theta_1 = 2\,k\,\pi$, ce qui s'écrit encore :

$$\Phi(\theta_1) = \Phi(\theta_2) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_2 - \theta_1 = 2\,k\,\pi.$$

Dans la suite de ce chapitre, toutes les mesures d'angles seront données en radians mais, dans certains domaines, on mesure les angles en degrés ; ces diverses mesures étant proportionnelles, il est aisé de convertir.

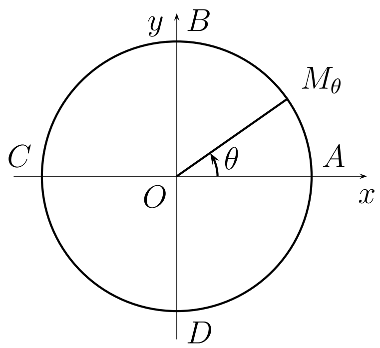
Toutefois, les correspondances du tableau suivant doivent tenir du réflexe :

Mesure en radians	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
Mesure en degrés	180	90	60	45	30

Exemples Avec les notations de la figure ci-contre :

- les réels $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{3\pi}{2}$ sont des solutions de l'équation $\Phi(\theta) = B$;
- l'ensemble des nombres réels solutions de l'équation $\Phi(\theta) = B$ est :

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$



www **Exercice 1 :** Donner les solutions de l'équation $\Phi(\theta) = C$. p.28

www **Exercice 2 :** Donner les solutions de l'équation $\Phi(\theta) = D$. p.28

Exercice 3 : Placer sur Γ les points $\Phi(\frac{\pi}{4})$, $\Phi(\frac{5\pi}{4})$, $\Phi(\frac{9\pi}{4})$. p.28

Exercice 4 : Placer d'autres points de façon interactive <cliquer ici>

2. Modulo

Dans cette partie on désigne par θ_0, θ_1 et θ_2 trois nombres réels.

On a vu que l'on a $\Phi(\theta_1) = \Phi(\theta_2)$ si, et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{Z}\ \theta_2 - \theta_1 = 2\,k\,\pi.$$

C'est un cas particulier de la définition suivante.

Définition 1

On dit que θ_1 est congru à θ_2 modulo θ_0 si, et seulement si :

$$\text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta_2 - \theta_1 = k\,\theta_0.$$

Notations

- La relation « θ_1 est congru à θ_2 modulo θ_0 » se note $\theta_1 \equiv \theta_2\ [\theta_0]$.
- Sa négation se note $\theta_1 \not\equiv \theta_2\ [\theta_0]$.

Exemple Avec cette nouvelle notation, on peut donc écrire :

$$\Phi(\theta_1) = \Phi(\theta_2) \iff \theta_1 \equiv \theta_2\ [2\,\pi].$$

www **Exercice 5 :** Déterminer les réels θ vérifiant : $3\,\theta + \pi \equiv 2\theta - \frac{\pi}{3}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.
Préciser combien cela donne d'images sur le cercle trigonométrique. p.28

Méthode Souvent en trigonométrie on doit résoudre des « équations modulo » où il faut diviser chacun des membres par un nombre, et la grande question est alors de savoir « *s'il faut ou non diviser le modulo* ». C'est évidemment une *fausse question* et, pour éviter toute angoisse, il suffit, comme souvent, de se ramener à la définition, en transformant

- une relation du type $\theta_1 \equiv \theta_2\ [\theta_0]$
- en une relation du type « il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_2 - \theta_1 = k\,\theta_0$ »

comme on peut le voir dans la correction de l'exercice suivant.

Après quelques utilisations de ce mécanisme, on sait « *s'il faut ou non diviser* » ou « *pourquoi il faut diviser* », et l'on peut sans problème sauter cette étape.

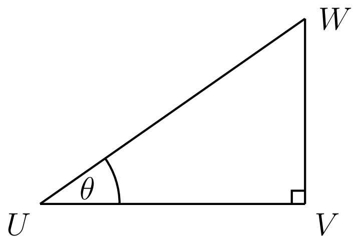
www **Exercice 6 :** Déterminer les réels θ vérifiant : $3\,\theta + \pi \equiv -\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Préciser combien cela donne d'images sur le cercle trigonométrique. p.29

3. Sinus, cosinus (et tangente)

a) Définition à l'aide d'un triangle rectangle

La première définition que vous avez vue du sinus et du cosinus utilise les angles d'un triangle rectangle.

Plus précisément avec les notations de la figure ci-contre, où :

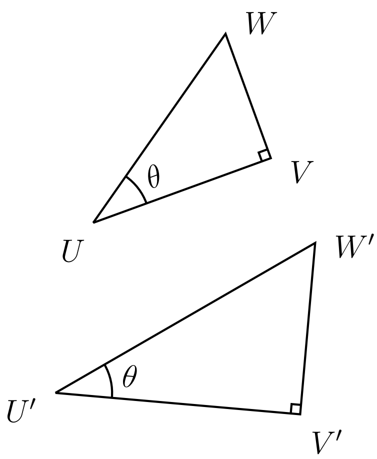


- UVW est un triangle rectangle en V,
- θ est la mesure de l'angle géométrique VUW $\left(\text{on a donc } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$,

on pose alors :

$$\cos\theta = \frac{UV}{UW} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{VW}{UW} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}.$$

Cohérence des définitions précédentes
Soit θ un réel donné. Si UVW et $U'V'W'$ sont deux triangles rectangles en V et V', tels que θ soit la mesure des angles géométriques VUW et $V'U'W'$, alors ces triangles sont semblables (ou encore homothétiques, voire de même forme) et l'on a donc :



$$\frac{UV}{UW} = \frac{U'V'}{U'W'} \quad \text{et} \quad \frac{VW}{UW} = \frac{V'W'}{U'W'}.$$

On en déduit la cohérence des définitions précédentes puisque les rapports utilisés ne dépendent pas du triangle mais seulement de la valeur de θ.

Premières relations Comme la somme des mesures angles géométriques VUW et UWV vaut $\frac{\pi}{2}$, il est immédiat que, pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta.$$

Culture générale Deux angles ou (deux arcs) dont la somme des mesures vaut $\frac{\pi}{2}$ sont appelés **complémentaires**.

www **Exercice 7 :** Donner les valeurs des fonctions cos et sin en $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$. p.30

www **Exercice 8 :** Donner de même les valeurs des fonctions cos et sin en $\frac{\pi}{4}$. p.30

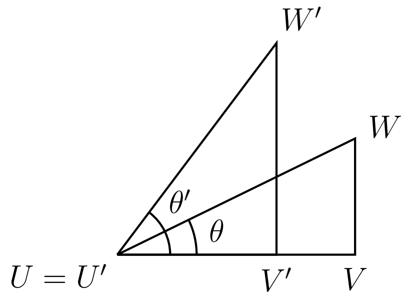
Remarque Avec la définition précédente, on dispose donc de deux fonctions réelles d'une variable réelle définies sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ et à valeurs dans $[0, 1]$ puisque dans un triangle rectangle, la longueur de chaque côté est inférieure à celle de l'hypoténuse.

En prenant deux triangles rectangles de même hypoténuse ($UW = UW'$) comme sur la figure ci-contre, on voit que si :

$$0 < \theta \leqslant \theta' < \frac{\pi}{2},$$

alors on a :

$$\cos\theta \geqslant \cos\theta' \quad \text{et} \quad \sin\theta \leqslant \sin\theta'.$$



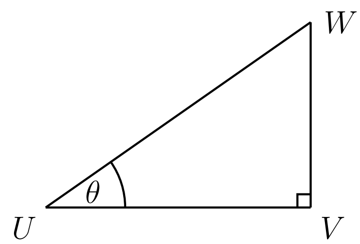
Autrement dit, sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$,

- la fonction cos est décroissante ;
- la fonction sin est croissante.

Un peu de hors-programme : la fonction tangente

Avec les notations précédentes (*cf.* figure ci-contre), pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on pose :

$$\tan\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{VW}{UV} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$



On dispose ainsi d'une fonction à valeurs réelles définie sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. C'est la fonction **tangente**.

Il est alors immédiat que, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}.$$

www **Exercice 9 :** Donner les valeurs de la fonction tan en $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$. p.30

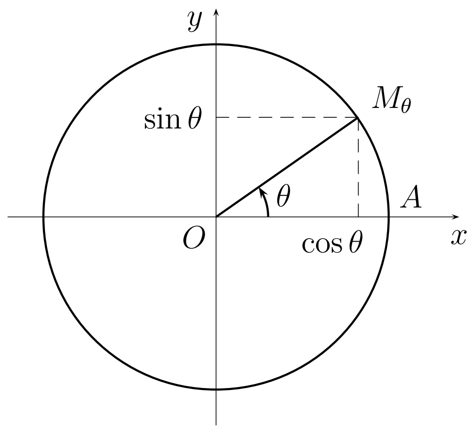
www **Exercice 10 :** Donner de même $\tan\frac{\pi}{4}$. p.30

Exercice 11 : Justifier à l'aide d'un dessin que la fonction tan est croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. p.31

www **Exercice 12 :** En déduire une autre méthode pour retrouver les valeurs $\tan\frac{\pi}{6}$ et $\tan\frac{\pi}{3}$. p.31

b) Définition à l'aide du cercle trigonométrique

Vous avez ensuite vu une définition plus complète de ces fonctions à l'aide du cercle trigonométrique.



Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $M_\theta = \Phi(\theta)$, ce qui signifie que M_θ est le point du cercle trigonométrique Γ tel que :

$$\left(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM_\theta}}\right) = \theta.$$

On appelle alors :

- $\cos\theta$ l'abscisse du point M_θ ;
- $\sin\theta$ l'ordonnée point M_θ.

www **Exercice 13 :** Vérifier qu'il s'agit bien d'une généralisation de la première définition de ces fonctions trigonométriques. p.31

Exercice 14 : Donner les valeurs en $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$, $\pm\frac{3\pi}{2}$ des fonctions sinus et cosinus. p.31

Comme M_θ est est sur Γ, on en déduit la **relation fondamentale** :

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Exercice 15 : Justifier la relation fondamentale ci-dessus. p.32

Remarques

- On dispose ainsi de deux fonctions réelles d'une variable réelle, les fonctions sin et cos, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0, 1]$.
- Comme la fonction $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \Gamma \\ \theta & \longmapsto & M_\theta \end{array}$ est de période $2\,\pi$ (*cf.* page 4), il est immédiat que ces fonctions sont aussi de période $2\,\pi$.
- Enfin, une propriété importante : pour tout couple (x, y) de nombres réels vérifiant $x^2 + y^2 = 1$, il existe (au moins) un réel θ tel que :

  $$\cos\theta = x \quad \text{et} \quad \sin\theta = y.$$

  C'est une conséquence directe du premier point de la proposition 1 de la page 5, puisque si $x^2 + y^2 = 1$, alors le point $M(x, y)$ appartient au cercle Γ.

  Une justification rigoureuse directe de cette propriété peut se faire à l'aide de résultats concernant la continuité, mais cela sort du cadre de cet exposé.

www **Exercice 16 :** En utilisant le cercle trigonométrique, dire si les fonctions sin et cos sont positives sur chacun des intervalles suivants : p.32

$$I_1 = [0, \pi] \qquad I_2 = [-\pi, \pi] \qquad I_3 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\cdot$$

www **Exercice 17 :** Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\cos x = \frac{1}{3}\cdot$ Que vaut $\sin x$? p.33

Exercice 18 : En utilisant le cercle trigonométrique, dire si les fonctions sin et cos sont monotones sur chacun des intervalles suivants :

$$I_1 = [0, \pi] \qquad I_2 = [-\pi, \pi] \qquad I_3 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\cdot$$ p.33

Exercice 19 : Visualisation dynamique (en ligne) de la monotonie ou non des fonctions sinus et cosinus sur $[0, \pi]$ <cliquer ici>

On peut maintenant généraliser la fonction tangente vue à la page 8.

Définition 2

Pour tout réel $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on pose $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot$

Remarque La définition précédente peut encore s'écrire :

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot$$

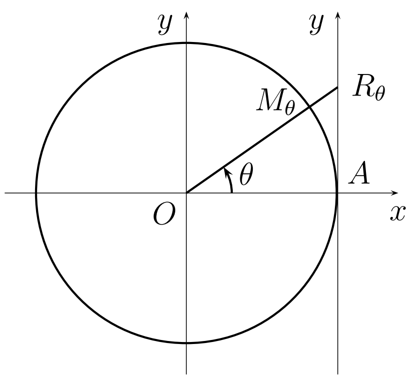
Rappelons que « $\setminus$ » permet d'écrire une différence ensembliste : si E et F sont deux ensembles, alors $E \setminus F$ est l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $x \notin F$.

Exercice 20 : Pourquoi dans la définition de $\tan\theta$ impose-t-on $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$? p.34

On peut aussi visualiser les valeurs de la fonction tangente à l'aide du cercle trigonométrique, *et il ne faut surtout pas s'en priver.*

Si l'on désigne par R_θ le point d'intersection de la droite (OM_θ) avec l'axe $(A, \vec{\jmath})$, alors $\tan\theta$ est l'abscisse de R_θ sur cet axe $(A, \vec{\jmath})$.

On peut encore énoncer ce résultat en disant que les coordonnées de R_θ sont $(1, \tan\theta)$.



www **Exercice 21 :** Justifier la valeur des coordonnées du point R_θ. p.34

Cette représentation de $\tan\theta$ à l'aide l'abscisse de R_θ permet de comprendre pourquoi l'on peut affirmer que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad y = \tan\theta.$$

Une justification rigoureuse de cette affirmation peut se faire à l'aide de résultats concernant la continuité, ce qui sort du cadre de cet exposé.

Exercice 22 : En utilisant le cercle trigonométrique, dire quels sont les réels θ vérifiant :

$$\tan\theta = 0.$$

p.34

Exercice 23 : En utilisant le cercle trigonométrique, dire si la fonction tan est monotone sur chacun des intervalles suivants :

$$I_1 = [0, \pi] \qquad I_2 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad I_3 = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[.$$

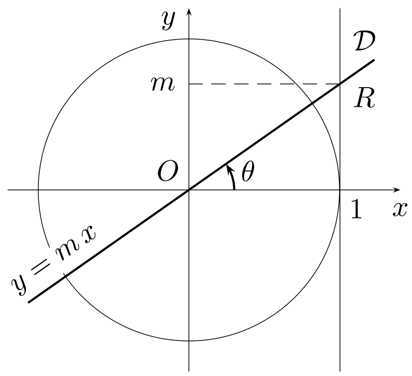
p.34

Exercice 24 : Visualisation dynamique (en ligne) de la monotonie ou non de la fonction tangente sur certains domaines. <cliquer ici>

Pente d'une droite et angle avec Ox

Le plan étant toujours rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = m\,x$ où m est un réel donné.

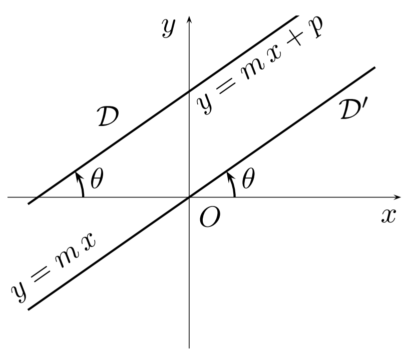
Désignons par θ une mesure de l'angle orienté de droites $(\widehat{Ox, \mathcal{D}})$. Une telle mesure est définie modulo π, et comme $\mathcal{D}$ coupe la droite d'équation $x = 1$ au point $R(1, m)$, une comparaison avec la figure précédente montre que l'on a :



$$m = \tan\theta = \tan\,(\widehat{Ox, \mathcal{D}}).$$

Généralisation

- Lorsque $\mathcal{D}$ a pour équation $y = m\,x + p$ avec m et p deux réels donnés, le réel m s'appelle la **pente de la droite $\mathcal{D}$**.
- L'angle $(\widehat{Ox, \mathcal{D}})$ est alors égal à $(\widehat{Ox, \mathcal{D}'})$ où $\mathcal{D}'$ est la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par l'origine, et $\mathcal{D}'$ a pour équation $y = m\,x$.
- D'après ce qui précède, l'angle $(\widehat{Ox, \mathcal{D}})$, a donc pour mesure tout réel θ défini modulo π par $\tan\theta = m$.



www **Exercice 25 :** Si une droite $\mathcal{D}$ a pour équation $a\,x + b\,y + c = 0$ où a, b et c sont des réels donnés avec a et b non tous deux nuls, donner une mesure de $(\widehat{Ox, \mathcal{D}})$. p.35

Proposition 2

Pour tout réel $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a : $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

www **Exercice 26 :** Justifier la relation entre $\tan^2\theta$ et $\cos^2\theta$. p.35

www **Exercice 27 :** Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifie $\cos x = \frac{1}{3}$, alors que vaut $\tan x$? p.36

www **Exercice 28 :** Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifie $\sin x = -\frac{1}{5}$, alors que vaut $\tan x$? p.36

4. Premières relations trigonométriques

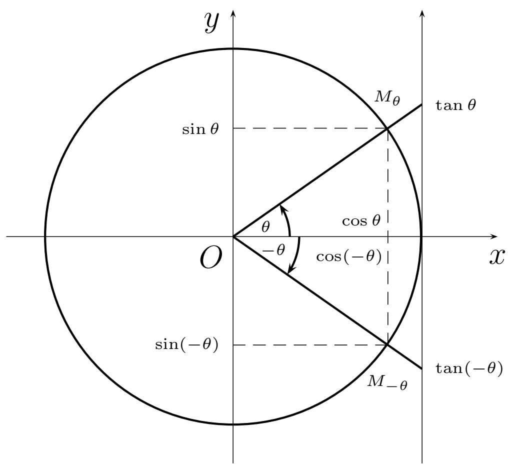
a) Utilisation du cercle trigonométrique

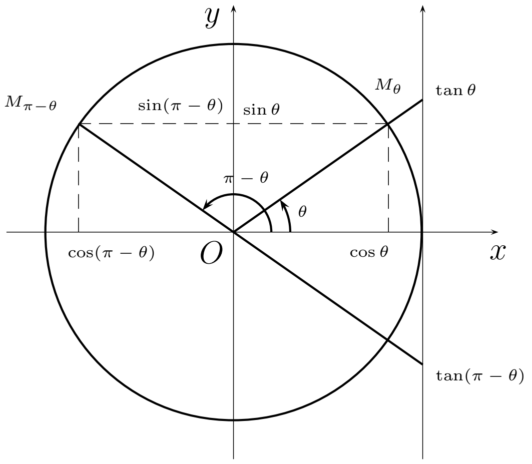
Sur le cercle trigonométrique

- le changement de θ en $-\theta$ correspond à une symétrie par rapport à Ox ; plus précisément, les points M_θ et $M_{-\theta}$ sont symétriques par rapport à Ox ;
- le changement de θ en $\pi - \theta$ correspond à une symétrie par rapport à Oy ; plus précisément, les points M_θ et $M_{\pi-\theta}$ sont symétriques par rapport à Oy ;
- le changement de θ en $\pi + \theta$ correspond à une symétrie par rapport à O ; plus précisément, les points M_θ et $M_{\pi+\theta}$ sont symétriques par rapport à O ;

Les relations entre les lignes trigonométriques de θ, $\pi - \theta$ et $\pi + \theta$ sont donc évidentes dès que l'on visualise l'une des figures suivantes.

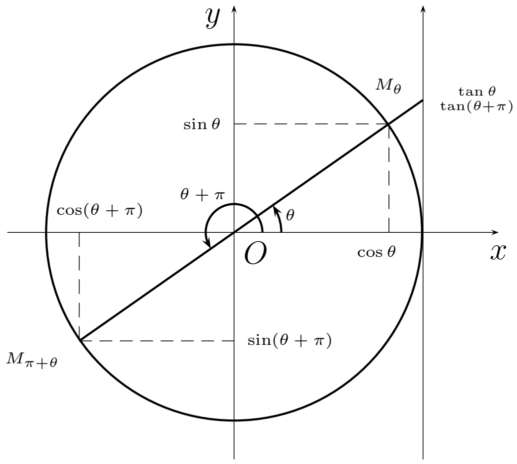
Arcs opposés : θ et $-\theta$





Arcs supplémentaires : θ et $\pi-\theta$

Arcs différant de π : θ et $\theta+\pi$



Culture générale Deux angles ou (deux arcs) dont la somme des mesures vaut π sont appelés **supplémentaires**.

www **Exercice 29 :** Valeurs des lignes trigonométriques en $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$. p.36

Exercice 30 : Valeurs des lignes trigonométriques en $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. p.37

Remarque En utilisant le cercle trigonométrique, on « voit » immédiatement que :

- la fonction sin est impaire, à savoir : $\forall\theta\in\mathbb{R} \quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$;
- la fonction cos est paire, à savoir : $\forall\theta\in\mathbb{R} \quad \cos(-\theta)=\cos\theta$;
- la fonction tan est
  - impaire, à savoir : $\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\ k\in\mathbb{Z}\right\} \quad \tan(-\theta)=-\tan\theta$;
  - de période π, à savoir : $\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\ k\in\mathbb{Z}\right\} \quad \tan(\theta+\pi)=\tan\theta$.

Ce sont des résultats importants que l'on utilise souvent.

b) Utilisation d'un triangle rectangle

Les premières définitions de sin et cos données à l'aide d'un triangle rectangle permettent facilement de relier les lignes trigonométriques des angles complémentaires. Plus précisément, on a vu (*cf.* page 7) que pour tout réel $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \quad \text{et donc} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}\cdot$$

En utilisant les valeurs ensuite attribuées aux fonctions sin et cos en 0 et $\frac{\pi}{2}$, on peut même aisément vérifier que :

$$\forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta.$$

En fait ces deux dernières relations restent vraies pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

www **Exercice 31 :** Justifier l'affirmation précédente. p.37

Comme les formules précédentes ne font pas intervenir de signes mais seulement une permutation de sin et de cos, il ne faut pas hésiter à s'en servir ! On a donc :

$$\forall\theta\in\mathbb{R} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta.$$

On en déduit immédiatement :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\,\pi}{2}\,;\ k\in\mathbb{Z}\right\} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}\cdot$$

Exercice 32 : Avez-vous bien noté le domaine de définition de la dernière relation ? p.38

Relations déduites

En ce qui concerne la transformation de x en $x+\frac{\pi}{2}$, il y a permutation des sin et cos mais avec « parfois » introduction d'un signe. D'où l'angoisse et les hésitations. En revanche, vous savez, sans la moindre hésitation, que l'on a :

$$\text{soit} \quad \forall\theta\in\mathbb{R} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta, \quad \text{soit} \quad \forall\theta\in\mathbb{R} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

ainsi que :

$$\text{soit} \quad \forall\theta\in\mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta, \quad \text{soit} \quad \forall\theta\in\mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$$

mais vous hésitez sur le signe intervenant au second membre. Pour confirmer ou infirmer la présence de ce signe « - », voici plusieurs pistes.

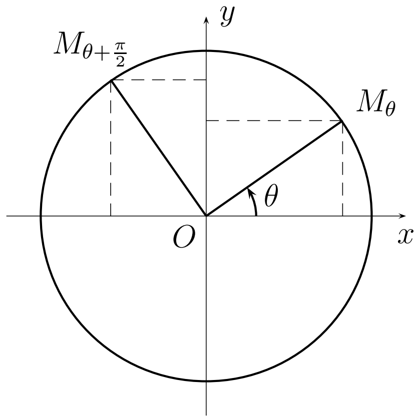
- Première possibilité : pour décider, il suffit de prendre $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ avec donc $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$. L'utilisation du cercle trigonométrique permet alors de déterminer les signes de $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$, $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$, et donc d'assurer le résultat.

  Sur la figure ci-contre, on voit que l'on a :

  $$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \leqslant 0.$$

  C'est donc qu'il faut prendre :

  $$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta.$$



- On peut aussi travailler par « double détente » en visualisant $\frac{\pi}{2}+\theta$ sous la forme $\frac{\pi}{2}-(-\theta)$ et en utilisant d'abord les relations concernant les angles complémentaires (il n'y a aucun signe) puis celles concernant les angles opposés.

  Cette méthode peut paraître plus longue que la précédente mais si vous faites l'effort de vous y exercer honnêtement (et de tête dès que possible), alors à la longue, elle est plus rapide et plus sûre que la précédente.

www **Exercice 33 :** En utilisant la dernière méthode,

1. évaluer $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\sin\theta$ et/ou $\cos\theta$;
2. évaluer $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\sin\theta$ et/ou $\cos\theta$. p.38

www **Exercice 34 :** Exprimer $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ et $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

1. en fonction de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$;
2. en fonction de $\tan\theta$. p.38

Remarque En Terminale, on peut aussi utiliser l'exponentielle complexe, à condition de la connaître et d'être à l'aise avec elle. En effet, la relation :

$$e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}}\, e^{i\theta} = i\, e^{i\theta}$$

qui s'écrit aussi :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = i\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

donne par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta.$$

5. Premières équations trigonométriques

Soit φ un réel donné. La résolution des équations trigonométriques du genre :

$$\cos\theta = \cos\varphi\,, \quad \sin\theta = \sin\varphi \quad \text{ou} \quad \tan\theta = \tan\varphi,$$

repose sur la proposition suivante que nous admettrons pour l'instant.

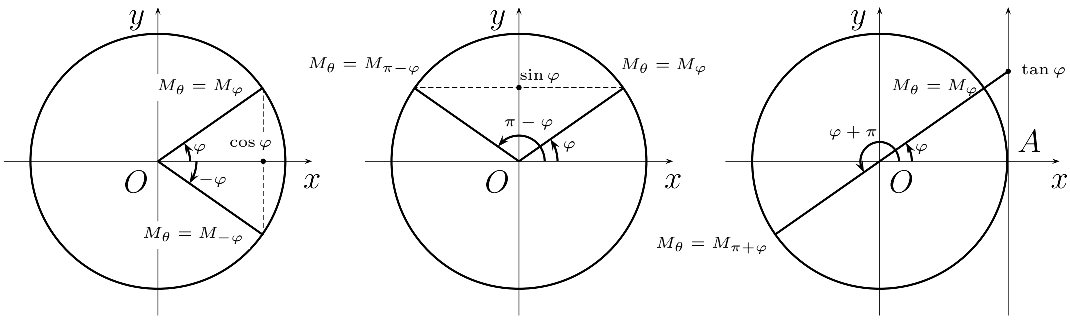
Proposition 3

Soit θ et φ deux réels quelconques.

- la relation $\cos\theta = \cos\varphi$ équivaut à : $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\varphi\ [2\pi]$;
- la relation $\sin\theta = \sin\varphi$ équivaut à : $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi - \varphi\ [2\pi]$;
- la relation $\tan\theta = \tan\varphi$ équivaut à : $\theta \equiv \varphi\ [\pi]$.

Remarque

- Il est exclu d'apprendre par cœur la moindre des propriétés précédentes, la visualisation du cercle trigonométrique étant amplement suffisante pour les retrouver.



$\cos\theta = \cos\varphi$ $\qquad$ $\sin\theta = \sin\varphi$ $\qquad$ $\tan\theta = \tan\varphi$

- Après avoir introduit les propriétés de continuité et de dérivabilité des fonctions trigonométriques, il sera possible de donner une justification rigoureuse des affirmations précédentes s'appuyant sur des études de variations.
- Mais, même alors, l'utilisation du cercle trigonométrique restera le moyen le plus efficace de retrouver ces résultats rigoureusement établis.

www **Exercice 35 :** Soit φ un paramètre réel donné élément de $[0,\pi]$. Combien l'équation :

$$\cos\theta = \cos\varphi$$

donne-t-elle de points sur le cercle trigonométrique ? p.39

www **Exercice 36 :** Pour $\varphi \in \mathbb{R}$, dire combien l'équation :

$$\sin\theta = \sin\varphi$$

donne de points sur le cercle trigonométrique. p.39

www **Exercice 37 :** Déterminer de même le nombre de points correspondant aux solutions de l'équation $\tan\theta = \tan\varphi$ où φ est un paramètre réel. p.40

www **Exercice 38 :** Résoudre l'équation : $\sin\theta = \sqrt{3}\,\cos\theta$. p.41

www **Exercice 39 :** Résoudre l'équation : $\sin\theta = \cos 2\,\theta$. p.41

www **Exercice 40 :** Résoudre l'équation $\sin\theta\,\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$. p.41

www **Exercice 41 :** Résoudre l'équation $2\,\cos^2\theta - 3\,\cos\theta + 1 = 0$. p.42

www **Exercice 42 :** Résoudre l'équation $3\,\sin\theta - \cos^2\theta + 3 = 0$. p.42

6. Culture générale : la fonction cotangente

Définition 3 (hors programme même en prépa)

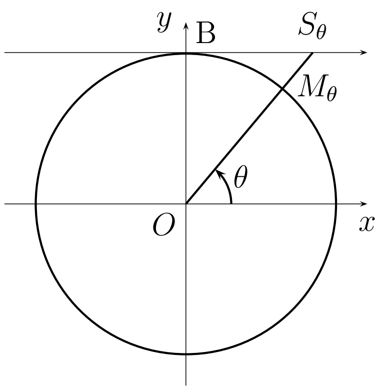
Pour tout réel $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, on pose $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

On peut aussi visualiser les valeurs de la fonction cotangente à l'aide du cercle trigonométrique, et il ne faut pas s'en priver.

Reprenons le cercle trigonométrique en lui ajoutant l'axe $(B, \vec{\imath})$.

Si, pour $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, on désigne par S_θ le point d'intersection de la droite (OM_θ) avec l'axe $(B, \vec{\imath})$, alors $\cot\theta$ est l'abscisse de S_θ sur cet axe $(B, \vec{\imath})$.

On peut encore énoncer ce résultat en disant que les coordonnées de S_θ sont $(\cot\theta, 1)$.



www **Exercice 43 :** Justifier la valeur des coordonnées de S_θ. p.43

www **Exercice 44 :** Quelle relation existe-t-il entre $\tan\theta$ et $\cot\theta$? p.43

Remarque L'intérêt de cette fonction cotangente est surtout de donner des relations plus symétriques concernant les angles complémentaires. À l'instar de :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

on a les relations :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

et

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta.$$

www **Exercice 45 :** Quelle relation existe-t-il entre $\cot^2\theta$ et $\sin^2\theta$? p.43

III. Addition, linéarisation, factorisation

Après avoir défini les fonctions trigonométriques et vu leurs propriétés élémentaires, on peut maintenant aborder ce qui est un cauchemar pour certains, à savoir les « formules de trigonométrie ». En travaillant toujours avec le même l'état d'esprit, nous allons voir qu'il y a seulement un minimum de formules sont à connaître par cœur, à condition de s'entraîner à retrouver toutes les autres instantanément.

1. Développement de $\cos(\theta \pm \varphi)$ et $\sin(\theta \pm \varphi)$

Proposition 4

Si θ et φ sont deux nombres réels alors on a :

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\,\cos\varphi + \sin\theta\,\sin\varphi \qquad (i)$$

ainsi que :

$$\sin(\theta - \varphi) = \sin\theta\,\cos\varphi - \cos\theta\,\sin\varphi. \qquad (ii)$$

www **Exercice 46 :** Donner une justification de la relation (i) en utilisant le produit scalaire des deux vecteurs du plan $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. p.43

www **Exercice 47 :** Déduire la relation (ii) de la relation (i). p.44

Les formules donnant $\cos(\theta + \varphi)$ et $\sin(\theta + \varphi)$ s'en déduisent immédiatement : il suffit de changer φ en $-\varphi$ dans les formules (i) et (ii) puis d'utiliser les propriétés de parité ou d'imparité des fonctions sin et cos, pour obtenir :

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\,\cos\varphi - \sin\theta\,\sin\varphi$$

ainsi que :

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\,\cos\varphi + \cos\theta\,\sin\varphi.$$

Il est hors de question de vous forcer à mémoriser les quatre formules.

Comment assurer ces formules Les quatre formules permettant de développer $\cos(\theta \pm \varphi)$ et $\sin(\theta \pm \varphi)$ sont d'une utilisation courante et vous devez être capable de les écrire sans hésitation. Voici quelques pistes pour vous éviter toute angoisse.

- Tout d'abord, il faut *oublier et proscrire* toute règle mnémotechnique du genre « sin est gentil alors que cos est mauvais » ou des règles à la « si si co co si... » qui obligent à tout écrire.
- Ne pas hésiter à prendre des cas particuliers comme $\theta = 0$, $\varphi = 0$ ou $\theta = \pm\varphi$.
- En particulier :
  - ∗ pour le développement de $\sin(\theta - \varphi)$, la moindre des choses est d'obtenir une expression qui est nulle pour $\theta = \varphi$;
  - ∗ en revanche pour $\cos(\theta - \varphi)$, le résultat doit faire 1 pour $\theta = \varphi$, il est donc normal de trouver
    - ⋆ $\cos^2\theta + \sin^2\theta$, qui vient de $\cos\theta\,\cos\varphi + \sin\theta\,\sin\varphi$,
    - ⋆ et non pas $\cos^2\theta - \sin^2\theta$, qui viendrait de $\cos\theta\,\cos\varphi - \sin\theta\,\sin\varphi$.
- En ce qui concerne la présence et le nombre de sin et de cos à droite, on peut utiliser avec profit la parité de la fonction cos et l'imparité de la fonction sin.

  En effet, si on change θ en $-\theta$, et φ en $-\varphi$, alors :
  - ∗ la quantité $\cos(\theta + \varphi)$ doit rester invariante ; donc à droite,
    - ⋆ on peut trouver soit un produit $\cos\theta\,\cos\varphi$, soit un produit $\sin\theta\,\sin\varphi$ qui sont invariants par ce type de transformation,
    - ⋆ on n'a guère de chance de trouver de produit $\sin\theta\,\cos\varphi$ ou $\cos\theta\,\sin\varphi$;
  - ∗ En revanche la quantité $\sin(\theta + \varphi)$ doit se transformer en son opposée ; par suite, chacun des produits de droite doit contenir un sinus et un cosinus.
- À partir du niveau terminale, le plus rapide est évidemment de *visualiser* le développement de $e^{i(\theta+\varphi)}$ (*cf.* exercice suivant). On peut l'écrire au début si c'est indispensable mais il faut rapidement viser à se passer de cette étape.

www **Exercice 48 :** Si vous connaissez l'exponentielle complexe, donner une autre façon de retrouver les développements de $\cos(\theta + \varphi)$ et de $\sin(\theta + \varphi)$. p.44

2. Transformation de $a\,\cos\theta + b\,\sin\theta$

Les formules donnant le développement de $\cos(\theta \pm \varphi)$ et de $\sin(\theta \pm \varphi)$ permettent inversement d'exprimer les combinaisons linéaires $a\,\cos\theta + b\,\sin\theta$ en fonction d'une seule des fonctions sinus ou cosinus et d'un déphasage. La méthode est expliquée dans les deux exercices suivants.

www **Exercice 49 :** Soit a et b deux réels dont au moins un est non nul. On considère :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & a\,\cos\theta + b\,\sin\theta \end{array}.$$

Montrer qu'il existe un couple $(M, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = M\,\sin(\theta + \varphi).$$

Indication : mettre $\sqrt{a^2+b^2}$ en facteur. p.44

www **Exercice 50 :** Avec les notations précédentes, montrer qu'il existe $(M', \varphi') \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = M'\,\cos(\theta + \varphi').$$

Donner deux méthodes. p.45

Remarque Bien évidemment, ce n'est surtout pas la forme exacte du résultat qu'il faut retenir mais la la méthode, qui consiste à mettre $\sqrt{a^2+b^2}$ en facteur.

On peut utiliser les transformations précédentes pour répondre très rapidement à quelques questions simples, comme dans les exercices suivants.

www **Exercice 51 :** Déterminer les valeurs de θ annulant la fonction :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta + 2 \end{array}.$$

Indication : utiliser une des transformations précédentes (en essayant évidemment de ne pas regarder les exercices ci-dessus). p.45

www **Exercice 52 :** Maximum et minimum de $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & 3\cos\theta + \sin\theta + 2 \end{array}.$ p.46

3. Développement de $\tan(\theta \pm \varphi)$

Le développement de $\tan(\theta \pm \varphi)$ est aussi une application directe des formules donnant le développement de $\cos(\theta \pm \varphi)$ et de $\sin(\theta \pm \varphi)$.

Proposition 5

Si θ et φ sont deux réels tels que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\varphi \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\theta + \varphi \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors :

$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta\ \tan\varphi}.$$

www **Exercice 53 :** Justifier la formule précédente. p.46

Remarque Il est inutile de mémoriser $\tan(\theta - \varphi)$ car il suffit de changer φ en $-\varphi$.

Comment retrouver cette formule

- *Visualiser* le calcul de la démonstration précédente.
- Se rappeler que les signes intervenant au numérateur et au dénominateur sont différents, celui du numérateur se retrouvant à l'aide des cas particulier $\theta = \pm\varphi$ puisque, par exemple, la quantité $\tan(\theta - \varphi)$ doit s'annuler lorsque $\theta = \varphi$.
- Ne pas hésiter à prendre des cas particuliers comme $\theta = 0$, $\varphi = 0$.
- Les hypothèses débutant l'énoncé de la proposition précédente peuvent sembler difficiles à retenir mais elles deviennent évidentes dès que l'on se dit que pour écrire la formule, il est indispensable que les trois quantités $\tan(\theta + \varphi)$, $\tan\theta$ et $\tan\varphi$ soient définies.

www **Exercice 54 :** Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de pentes respectives m et m'.

Que peut-on dire de la tangente de l'angle $(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'})$? p.46

www **Exercice 55 :** Étant donné les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives :

$$\mathcal{D}_1 :\ 3\,x - y + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_2 :\ 4\,x + 2\,y - 5 = 0,$$

déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2})$. p.47

4. Duplication et arc moitié

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, il n'y a aucun effort de mémoire à faire pour connaître les formules :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\,\cos\theta$$

qui ne sont que des cas particuliers des formules d'addition de la partie III.1.

www **Exercice 56 :** Calculer le maximum et le minimum de l'application : p.47

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & \cos\theta\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\ \sin\left(\frac{\theta}{4}\right) \end{array}$$

Mais il faut pouvoir utiliser sans hésiter deux autres formes de la première formule.

Proposition 6

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 + \cos 2\theta = 2\,\cos^2\theta \quad \text{et} \quad 1 - \cos 2\theta = 2\,\sin^2\theta.$$

Il est indispensable de savoir utiliser les écritures ci-dessus de ces formules car :

- de la gauche vers la droite :

$$1 + \cos 2\theta \longrightarrow 2\,\cos^2\theta \quad \text{et} \quad 1 - \cos 2\theta \longrightarrow 2\,\sin^2\theta,$$

  elles permettent de simplifier des quantités telles que $\sqrt{1+\cos 2\theta}$ ou $\sqrt{1-\cos 2\theta}$, que l'on rencontre assez souvent dans les calculs ;
- de la droite vers la gauche :

$$1 + \cos 2\theta \longleftarrow 2\,\cos^2\theta \quad \text{et} \quad 1 - \cos 2\theta \longleftarrow 2\,\sin^2\theta,$$

  elles permettent de linéariser $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$, c'est-à-dire de les exprimer sans produit ni puissance supérieure ou égale à 2 ; on peut ainsi les intégrer ou les dériver plus facilement.

Comment assurer ces formules En général, vous hésitez entre

$$\begin{tikzcd}
 & \pm 2\,\cos^2\theta & \\
1+\cos 2\theta\ ? \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \pm 2\,\sin^2\theta & ?\ 1-\cos 2\theta \arrow[ul] \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
 & \pm \frac{1}{2}\cos^2\theta & \\
 & \pm \frac{1}{2}\sin^2\theta &
\end{tikzcd}$$

- Pour le « $\pm$ », il suffit de regarder le signe :
  - il est évident que $1+\cos 2\theta$ et $1-\cos 2\theta$ sont positifs ;
  - en revanche, si l'on a à simplifier $\cos 2\theta - 1$, le résultat doit être négatif.
- Pour le choix entre $\sin^2\theta$ et $\cos^2\theta$, il suffit de voir ce qui se passe lorsque $\theta = 0$: l'un est nul et l'autre pas.
- Pour le choix entre 2 et $\frac{1}{2}$, il suffit de constater que $1+\cos 2\theta$ et $1-\cos 2\theta$ varient de 0 à 2 alors que $\frac{1}{2}\cos^2\theta$ et $\frac{1}{2}\sin^2\theta$ ne peuvent pas dépasser $\frac{1}{2}$; mais on peut aussi regarder ce qui se passe en $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$

www **Exercice 57 :** Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Exprimer $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ en fonction de $\cos\theta$. p.47

Expressions en fonction de la tangente de l'arc moitié

Proposition 7

Soit θ un réel vérifiant $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$ et $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cdot$ Alors on a :

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{2\,t}{1+t^2}.$$

Si de plus $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors on a : $\tan\theta = \dfrac{2\,t}{1-t^2}\cdot$

www **Exercice 58 :** Justifier les trois formules précédentes (commencer par la plus simple). p.48

Comment assurer ces formules Si leur forme générale ne pose aucun problème :

« ce sont des fractions en $2\,t$, $1+t^2$ et $1-t^2$ » ,

vous avez souvent des problèmes d'affectation :

« où mettre ces différentes quantités ? »

On peut par exemple,

- penser que les fonctions cos et sin sont toujours définies, ce qui entraîne que leurs dénominateurs ne peuvent être ni $2\,t$ ni $1-t^2$: en effet ces quantités s'annulent pour certaines valeurs de t, ce qui fait désordre au dénominateur ;
- se rappeler que si $\theta = 0$, et donc $t = 0$, alors on a $\sin\theta = \tan\theta = 0$ mais $\cos\theta = 1$;
- voir que la formule donnant $\tan\theta$ n'est qu'un cas particulier de la formule d'addition concernant la fonction tangente ;
- utiliser parité et imparité : si on change θ en $-\theta$, et donc t en $-t$, alors $\cos\theta$ est invariant alors que $\sin\theta$ et $\tan\theta$ se transforment en leurs opposés.

www **Exercice 59 :** Déterminer la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdot$ p.49

5. Formules de linéarisation

La linéarisation d'une expression est l'opération qui consiste à transformer les produits en sommes : c'est une opération souvent indispensable pour pouvoir intégrer et même parfois très intéressante avant de dériver.

Étant donné θ et φ deux nombres réels, on a :

$$2\,\cos\theta\,\cos\varphi = \cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi)$$

$$2\,\sin\theta\,\sin\varphi = \cos(\theta-\varphi) - \cos(\theta+\varphi)$$

$$2\,\sin\theta\,\cos\varphi = \sin(\theta+\varphi) + \sin(\theta-\varphi)$$

En fait, il n'y a rien de nouveau dans ces formules : ce ne sont que les formules de développement de $\cos(\theta\pm\varphi)$ et $\sin(\theta\pm\varphi)$ « arrangées pour obtenir les produits de gauche » ; quand on a besoin d'utiliser l'une de ces formules, il faut :

- visualiser (de tête le plus vite possible) les formules donnant $\cos(\theta+\varphi)$, $\cos(\theta-\varphi)$, $\sin(\theta+\varphi)$ et $\sin(\theta-\varphi)$;
- choisir celles qu'il faut combiner, et comment les combiner (de tête), pour obtenir le produit attendu ;
- ne pas se priver de vérifier, une fois la relation écrite, en la relisant à l'envers !

Remarques

- Les deux premiers points précédents expliquent pourquoi il est préférable de voir ces formules avec le « 2 » en position de multiplicateur à gauche et non pas en position de diviseur à droite.
- Si jamais vous hésitez sur la position de ce « 2 » , diviseur ou en multiplicateur, vous pouvez penser en termes d'encadrement : un produit de sinus ou de cosinus reste entre -1 et $+1$, alors que la somme ou la différence peut très bien aller de -2 à $+2$.

Comment assurer ces formules Il suffit de se souvenir que les expressions transformées ne font intervenir que des sin et des cos de $(\theta\pm\varphi)$; ensuite on peut, par exemple :

- voir que, par le changement de (θ,φ) en $(-\theta,-\varphi)$,
  - les quantités $\cos\theta\,\cos\varphi$ et $\sin\theta\,\sin\varphi$ sont invariantes, donc les expressions obtenues n'utilisent que des cosinus ;
  - la quantité $\sin\theta\,\cos\varphi$ se transforme en son opposée, donc l'expression obtenue n'utilise que des sinus ;
- regarder ce qui se passe si on change un seul paramètre, θ ou φ, en son opposé ;
- penser aux cas particuliers : $\theta=0$, $\varphi=0$ ou $\theta=\pm\varphi$.

www **Exercice 60 :** Déterminer un réel k tel que, pour tout θ réel, on ait :

$$\sin(3\,\theta) = k\,\sin\theta\,\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\,\pi}{3}\right)\cdot$$

p.49

6. Formules de factorisation

Comme dernière application des formules de développement de cosinus et de sinus, nous pouvons donner les formules de factorisation souvent très utiles lors d'études de signes. Étant donné φ et θ deux nombres réels, on a :

$$\begin{aligned}
\cos\theta+\cos\varphi &= 2\,\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\\
\cos\theta-\cos\varphi &= -2\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\\
\sin\theta+\sin\varphi &= 2\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\\
\sin\theta-\sin\varphi &= 2\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Remarque On a l'habitude de donner ces quatre formules même si l'ensemble formé par les deux dernières est redondant puisqu'il suffit de changer φ en $-\varphi$ pour passer de l'une à l'autre. Ce n'est pas aussi simple pour les deux premières.

www **Exercice 61 :** Justifier les relations précédentes. p.49

www **Exercice 62 :** Comment pourrait-on quand même déduire :

$$\cos\theta-\cos\varphi = -2\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$

de la formule précédente ? p.50

www **Exercice 63 :** En fin de TS, on peut donner une autre justification des relations précédentes (à condition de bien manipuler l'exponentielle complexe).

1. Question préliminaire : qu'obtient-on de remarquable si l'on met $e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$ en facteur dans $e^{i\theta}+e^{i\varphi}$ ou dans $e^{i\theta}-e^{i\varphi}$?
2. En considérant les cosinus comme des parties réelles d'exponentielles complexes, justifier les deux premières relations.
3. Donner une justification analogue pour les deux dernières relations. p.51

Quelques pistes pour assurer ces formules Il suffit de se rappeler que les expressions transformées sont de la forme :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \sin \arrow[dr] & & \sin \arrow[dr] & \\
\pm 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \left(\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \left(\dfrac{\theta+\varphi}{2}\right). \\
 & \cos \arrow[ur] & & \cos \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ensuite on peut, par exemple, utiliser les remarques suivantes :

- Les quantités $\cos\theta - \cos\varphi$ et $\sin\theta - \sin\varphi$ sont nulles si $\theta = \varphi$, donc l'un des facteurs du produit obtenu doit être $\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$, la seule des quatre quantités ci-dessus à être nulle pour $\theta = \varphi$. Je vous conseille de commencer par celui-là.
- De même, pour $\sin\theta + \sin\varphi$ qui s'annule pour $\theta = -\varphi$ doit contenir $\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$, la seule des quatre quantités ci-dessus à être nulle pour $\theta = -\varphi$.
- Des considérations de parité et d'imparité peuvent aussi être très utiles : par exemple, dans la formule donnant $\cos\theta - \cos\varphi$:
  - $\ast$ d'après ce qui précède, on sait qu'il y a $\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$; l'autre terme ne peut pas être $\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$ puisque l'ensemble doit être invariant lorsque l'on change θ en $-\theta$ et φ en $-\varphi$; ce ne peut donc être que $\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cdot$
- La place du facteur 2 ne pose pas de problème, si on réfléchit comme dans les formules de linéarisation : une somme de deux sinus ou de deux cosinus peut varier de -2 à $+2$, alors qu'un produit reste compris entre -1 et $+1$.
- Pour la seconde relation, le signe « $-$ » devant le « 2 » peut être vu comme une conséquence de la décroissance du cosinus entre 0 et $\frac{\pi}{2}$: en effet, si l'on prend :
$$0 \leqslant \varphi < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$
alors on a :
$$0 \leqslant \frac{\theta-\varphi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{\theta+\varphi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$$
et donc :
$$\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) > 0 \text{ et } \sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) > 0 \quad \text{alors que} \quad \cos\theta - \cos\varphi < 0.$$

www **Exercice 64 :** Montrer que pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$ on a :
$$\frac{1-\cos 2\theta + \cos 4\theta - \cos 6\theta}{\sin 2\theta - \sin 4\theta + \sin 6\theta} = \tan 3\,\theta.$$
p.52

www **Exercice 65 :** Déterminer les solutions dans $[0, 2\pi[$ de l'équation :
$$\cos\theta - \cos 2\,\theta = \sin 3\,\theta.$$
p.53

IV. Formulaire muet

Pour finir un petit formulaire muet à fréquenter de temps à autre ...

- Lignes trigonométriques de : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ etc.
- Relation entre $\tan^2\theta$ et $\cos^2\theta$. <p. 12>
- Simplifier $\cos(-\theta)$, $\sin(-\theta)$, $\tan(-\theta)$. <p. 12>
- Simplifier $\cos(\pi-\theta)$, $\sin(\pi-\theta)$, $\tan(\pi-\theta)$. <p. 13>
- Simplifier $\cos(\theta+\pi)$, $\sin(\theta+\pi)$, $\tan(\theta+\pi)$. <p. 13>
- Simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. <p. 14>
- Simplifier $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$, $\sin(\theta+\frac{\pi}{2})$, $\tan(\theta+\frac{\pi}{2})$. <p. 14>
- Résolutions des équations $\cos\theta=\cos\varphi$, $\sin\theta=\sin\varphi$, $\tan\theta=\tan\varphi$. <p. 16>
- Développement de $\cos(\theta+\varphi)$, $\sin(\theta+\varphi)$, $\tan(\theta+\varphi)$. <p. 18>
- Factorisation de $1+\cos 2\theta$, $1-\cos 2\theta$. <p. 22>
- Expression de $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ en fonction de $t=\tan\frac{\theta}{2}$. <p. 23>
- Linéarisation de $\cos\theta\,\cos\varphi$, $\sin\theta\,\sin\varphi$, $\sin\theta\,\cos\varphi$. <p. 24>
- Linéarisation de $\cos^2\theta$, de $\sin^2\theta$. <p. 22>
- Factorisation de $\cos\theta+\cos\varphi$, $\cos\theta-\cos\varphi$, $\sin\theta+\sin\varphi$. <p. 25>

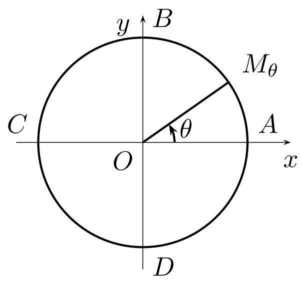
Si nécessaire, reportez-vous (pour vérifier) aux pages indiquées.

V. Solutions des exercices

Exercice 1 :

Par définition de la fonction Φ, l'ensemble des réels solutions de l'équation $\Phi(\theta) = C$ est :

$$S = \{(2\,k+1)\,\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$



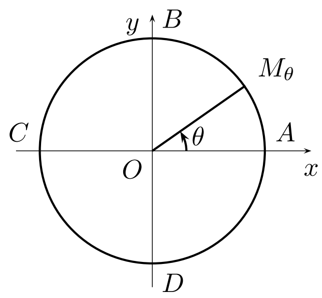
Exercice 2 :

Par définition de la fonction Φ, l'ensemble des réels solutions de l'équation $\Phi(\theta) = D$ est :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\,;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ou encore

$$S = \left\{\frac{3\,\pi}{2} + 2\,k\,\pi\,;\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$



Exercice 3 :

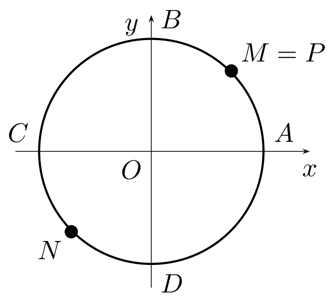
Les points :

$$M = \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right),\quad N = \Phi\left(\frac{5\,\pi}{4}\right)$$

et

$$P = \Phi\left(\frac{9\,\pi}{4}\right) = M$$

sont placés sur le dessin ci-contre.



Exercice 5 :

L'équation :

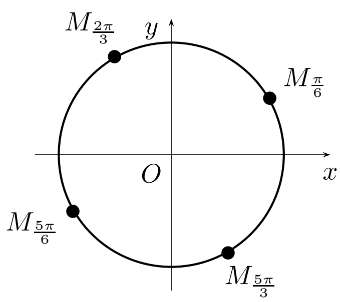
$$3\,\theta + \pi \equiv 2\theta - \frac{\pi}{3}\;\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

est équivalente à :

$$\theta \equiv -\frac{4\pi}{3}\;\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

ou encore à :

$$\theta \equiv \frac{\pi}{6}\;\left[\frac{\pi}{2}\right].$$



Elle a donc comme ensemble de solutions : $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\,\frac{\pi}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

On obtient ainsi 4 images sur le cercle trigonométrique.

Remarque Les transformations faites pour résoudre l'équation précédente sont identiques à celles faites pour une équation classique avec le signe « = » puisqu'un réel θ vérifie l'équation donnée si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$3\,\theta + \pi = 2\theta - \frac{\pi}{3} + k\,\frac{\pi}{2}$$

ce qui est équivalent à $\theta = \dfrac{\pi}{6} + k\,\dfrac{\pi}{2}$, d'où le résultat.

Exercice 6 :

L'équation :

$$3\,\theta + \pi \equiv -\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

est équivalente à :

$$5\,\theta \equiv -\frac{2\pi}{3}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

et donc à :

$$\theta \equiv -\frac{2\pi}{15}\ \left[\frac{\pi}{10}\right],$$

ce qui donne comme ensemble de solutions

$$S = \left\{ -\frac{2\pi}{15} + k\,\frac{\pi}{10}\,;\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On obtient donc 20 images sur le cercle trigonométrique.

Si nécessaire, voici une autre écriture de cette résolution.

Un réel θ vérifie l'équation :

$$3\,\theta + \pi \equiv -\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

si, et seulement si, il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$3\,\theta + \pi = -\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + k\,\frac{\pi}{2};$$

ce qui est équivalent à :

$$5\,\theta = -\frac{2\pi}{3} + k\,\frac{\pi}{2}$$

et donc à :

$$\theta = -\frac{2\pi}{15} + k\,\frac{\pi}{10}.$$

On en déduit que θ est solution de l'équation donnée si et seulement si :

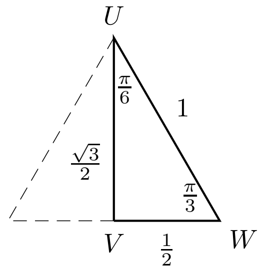
$$\theta \equiv -\frac{2\pi}{15}\ \left[\frac{\pi}{10}\right].$$

Un telle écriture (au brouillon) évite toute angoisse !

Exercice 7 :

Avec un triangle équilatéral de côté 1 divisé en deux, on obtient :

- l'hypoténuse UW de longueur 1,
- VW évidemment de longueur $\frac{1}{2}$,
- enfin, avec le théorème de Pythagore, le côté UV de longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



On en déduit immédiatement :

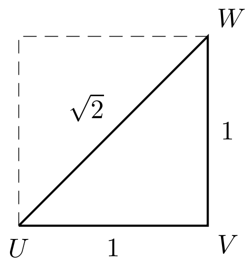
$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Évidemment ces calculs doivent se faire à la vitesse de la lumière !

Exercice 8 :

En utilisant (si possible de tête) un demi carré, on obtient immédiatement :

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Exercice 9 :

On peut

- soit utiliser les valeurs des fonctions sin et cos (mais dans ce cas, il faut les retrouver de tête et non pas aller les rechercher dans les pages précédentes, c'est comme cela que vous vous entraînerez à les retrouver) ;
- soit utiliser directement, si possible de tête, un demi triangle équilatéral (voir éventuellement les corrigé de l'exercice V.).

On obtient alors :

$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Évidemment ces calculs doivent se faire à la vitesse de la lumière !

Exercice 10 :

- On peut évidemment utiliser les valeurs des fonctions sin et cos (il faut alors les retrouver de tête et non aller les rechercher dans les pages précédentes, c'est comme cela que vous vous entraînerez).
- Mais, dans ce cas, il est pus facile d'utiliser directement un demi-carré car il est immédiat (sans le moindre calcul) que les côté « opposé » et « adjacent » sont égaux, ce qui donne :

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

Exercice 11 :

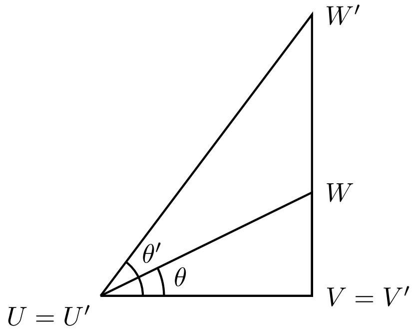
Avec les triangles rectangles UVW et $U'V'W'$ de la figure ci-contre, on voit que si :

$$0 < \theta \leqslant \theta' < \frac{\pi}{2},$$

alors on a :

$$\tan\theta \leqslant \tan\theta'.$$

Autrement dit, sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction tan est croissante.



Exercice 12 :

Souvent, pour les tangentes de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, vous hésitez entre $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$.

Comme $\frac{\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{3}$, la croissance de la fonction tangente sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ permet donc d'affirmer que l'on a $\tan\frac{\pi}{6} \leqslant \tan\frac{\pi}{3}\cdot$

Par suite, $\tan\frac{\pi}{6}$ est le plus petit des deux nombres et l'on a donc :

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{ainsi que} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.\cdot$$

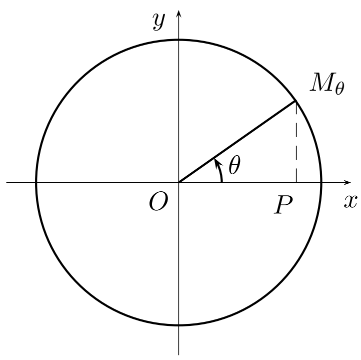
Remarque Il n'est pas étonnant que ces tangentes, $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$, soient inverses l'une de l'autre puisqu'il s'agit de tangentes d'angles complémentaires, c'est-à-dire d'angles dont la somme des mesures vaut $\frac{\pi}{2}\cdot$

Exercice 13 :

Utilisons les notations précédentes et supposons $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\cdot$

Dans le triangle OPM_θ rectangle en P,

- l'hypoténuse OM_θ a pour longueur 1,
- le côté adjacent à l'angle de mesure θ a pour longueur $OP = \cos\theta$.



Par suite on a :

$$\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{OP}{OM_\theta} = OP = \cos\theta.$$

Ainsi cette nouvelle définition de $\cos\theta$ est bien une généralisation de la première définition.

On fait de même pour le sinus.

Exercice 14 :

Il suffit de placer le point $M_\theta = \varphi(\theta)$ et de lire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en projetant.

On voit alors que l'on a :

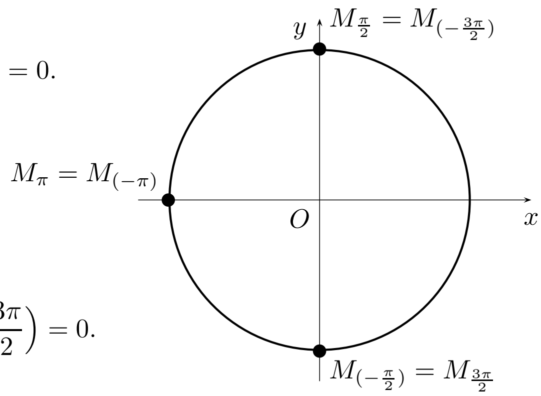
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \quad \text{et} \quad \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

On a de même :

$$\sin(\pm\pi)=0 \qquad \cos(\pm\pi)=-1.$$

Et enfin :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1 \qquad \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1 \quad \text{et} \quad \cos\left(\pm\frac{3\pi}{2}\right)=0.$$



Exercice 15 :

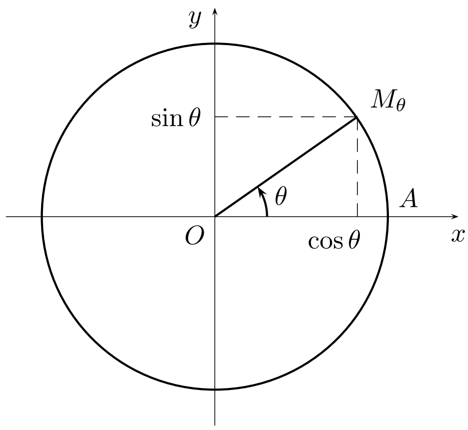
Utilisons les notations précédentes.
Par définition des lignes trigonométriques sin et cos, pour tout nombre réel $\theta \in \mathbb{R}$, le point M_θ a pour coordonnées $(x=\cos\theta, y=\sin\theta)$.

Comme M_θ appartient au cercle Γ d'équation :

$$x^2+y^2=1$$

on en déduit :

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

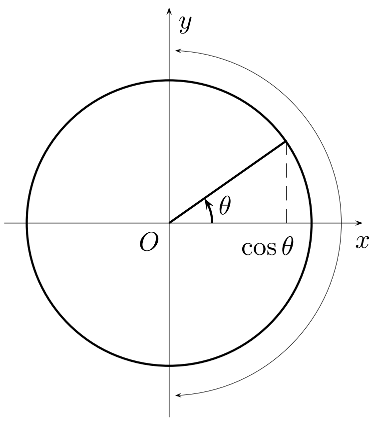


Remarque Pour $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on aurait pu justifier cette relation en utilisant la première définition des lignes trigonométriques et le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle.

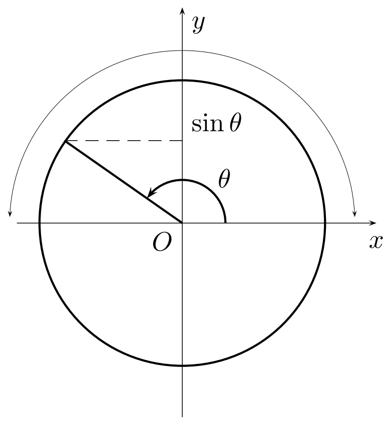
Exercice 16 :

En utilisant le cercle trigonométrique, on « voit » que :

- la fonction cos reste positive sur $I_3=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;
- la fonction sin reste positive sur $I_1=[0,\pi]$;
- aucune de ces fonctions ne garde un signe constant sur $I_2=[-\pi,\pi]$.



$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \implies \cos\theta\geqslant 0$



$0\leqslant\theta\leqslant\pi \implies \sin\theta\geqslant 0$

Remarque L'utilisation du cercle trigonométrique ne fournit évidemment pas de démonstration des affirmations précédentes mais elle permet de retrouver sans hésitation ces résultats. Pour les démontrer il faudrait bien sûr une définition rigoureuse des fonctions sinus et cosinus, mais cela sort du cadre de cet exposé.

Exercice 17 :

En utilisant la relation fondamentale, on obtient :

$$\sin^2 = 1 - \cos^2 x = \frac{8}{9}$$

ce qui nous donne :

$$\sin x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot$$

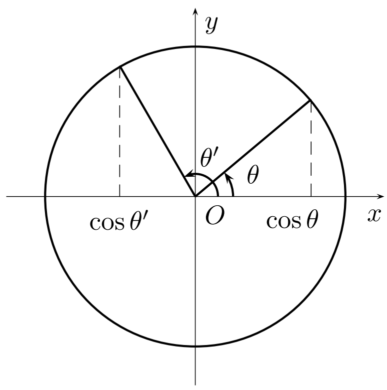
Sans information supplémentaire, on ne peut pas faire mieux car :

- Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors on a $\sin x \geqslant 0$ et donc $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;
- Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, alors on a $\sin x \leqslant 0$ et donc $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

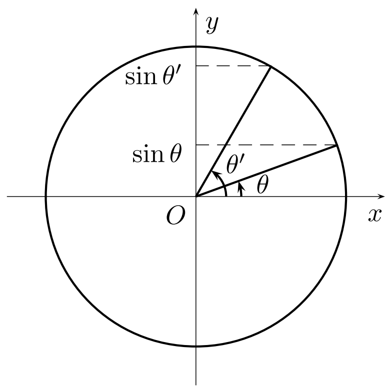
Exercice 18 :

En utilisant le cercle trigonométrique, on « voit » que :

- la fonction cos est décroissante sur $I_1 = [0, \pi]$;
- la fonction sin est croissante sur $I_3 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\cdot$



$$0 \leqslant \theta \leqslant \theta' \leqslant \pi \implies \cos\theta' \leqslant \cos\theta$$



$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \theta' \leqslant \frac{\pi}{2} \implies \sin\theta \leqslant \sin\theta'$$

Remarque L'utilisation du cercle trigonométrique ne fournit pas une démonstration des affirmations précédentes mais elle permet de retrouver sans hésitation ces résultats (que l'on pourrait démontrer par exemple avec une étude de variations à condition d'avoir une définition rigoureuse des fonctions sinus et cosinus ce qui sort du cadre de cet exposé).

En revanche, on peut démontrer que la fonction sin n'est pas monotone sur $I_1 = [0, \pi]$ car :

- elle n'est pas croissante puisque $\sin\frac{\pi}{2} > \sin\pi$ alors que $\frac{\pi}{2} < \pi$;
- elle n'est pas décroissante puisque $\sin\frac{\pi}{2} < \sin 0$ alors que $\frac{\pi}{2} > 0$.

On prouve de même que cos n'est pas monotone sur I_3, et qu'aucune de ces deux fonctions n'est monotone sur l'intervalle I_2.

Exercice 20 :

L'ensemble $E = \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ étant exactement l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles on a $\cos\theta = 0$, il est indispensable de supposer $\theta \notin E$ pour pouvoir écrire :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Remarque L'ensemble E est aussi l'ensemble des réels θ tels que : $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Exercice 21 :

Soit $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou encore $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Comme le point R_θ se trouve sur la parallèle à Oy issue de A, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de R_θ soient $(1, y)$.
- Étant donné que les points 0, M_θ et R_θ sont alignés et que le vecteur $\overrightarrow{OM_\theta}$ est non nul, on peut trouver $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OR_\theta} = k\,\overrightarrow{OM_\theta}$, ce qui donne pour les coordonnées :

$$1 = k\,\cos\theta \quad \text{et} \quad y = k\,\sin\theta.$$

On en déduit immédiatement $k = \frac{1}{\cos\theta}$ et donc $y = \tan\theta$.

Exercice 22 :

On « voit » sur le cercle trigonométrique que l'on a $\tan\theta = 0$ si, et seulement si : $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, ce qui l'on peut résumer en $\theta \equiv 0\ [\pi]$.

Remarque on aurait aussi pu justifier ce résultat en disant que l'équation $\tan\theta = 0$ possède les mêmes solutions que l'équation $\sin\theta = 0$.

Exercice 23 :

- La question de la monotonie de la fonction tan sur $I_1 = [0, \pi]$ ne peut pas se poser puisque cette fonction n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$.
- On « voit » sur le cercle trigonométrique que, si θ et θ' sont deux réels vérifiant :

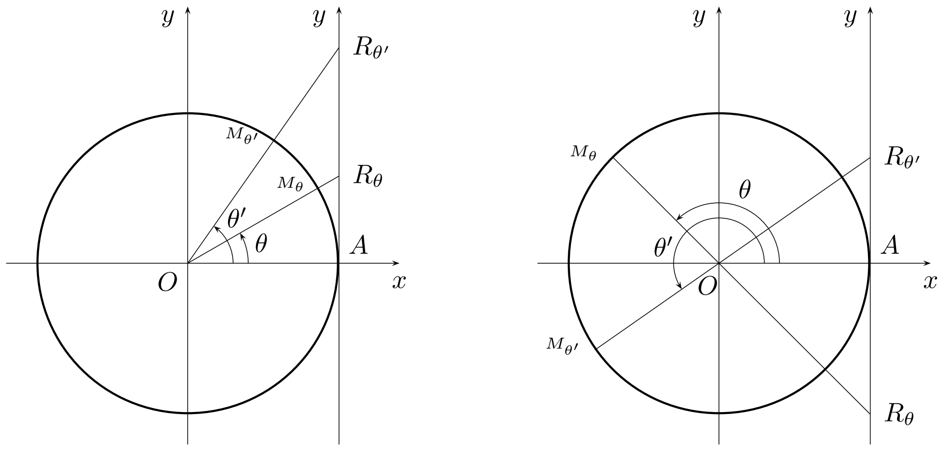
$$-\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \theta' < \frac{\pi}{2}$$

alors l'ordonnée de R_θ et inférieure à celle de $R_{\theta'}$; et donc $\tan\theta \leqslant \tan\theta'$ (*cf.* figure ci-dessous). La fonction tan est donc croissante sur $I_2 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

- On « voit » de même sur le cercle trigonométrique que, si θ et θ' sont deux réels vérifiant :

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \theta' < \frac{3\pi}{2}$$

alors on a $\tan\theta \leqslant \tan\theta'$ (*cf.* figure ci-dessous). La fonction tan est donc croissante sur I_3.



$-\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \theta' < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\theta \leqslant \tan\theta'$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \theta' < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \tan\theta \leqslant \tan\theta'$

Exercice 25 :

L'angle $(\widehat{Ox,\mathcal{D}})$ est égal à l'angle de Ox avec $\mathcal{D}'$, la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par l'origine, et qui a pour équation :

$$a\,x + b\,y = 0.$$

- Si $b = 0$, la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à Oy et donc :

$$(\widehat{Ox,\mathcal{D}}) \equiv (\widehat{Ox,\mathcal{D}'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi].$$

- Sinon, la droite $\mathcal{D}'$ a pour pente $-\frac{a}{b}\cdot$ L'angle $(\widehat{Ox,\mathcal{D}}) = (\widehat{Ox,\mathcal{D}'})$ a alors pour mesure tout réel θ défini modulo π par :

$$\tan\theta = -\frac{a}{b}\cdot$$

Remarque L'équation :

$$\tan\theta = -\frac{a}{b}$$

possède effectivement (au moins) une solution, ce que l'on a justifié empiriquement grâce de la représentation de $\tan\theta$ à l'aide du cercle trigonométrique (*cf.* page 10).

Exercice 26 :

Soit $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}$. On obtient directement le résultat en divisant la relation fondamentale :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

par $\cos^2\theta$ qui est non nul puisque $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Remarque C'est ainsi qu'il faut faire pour « assurer » cette relation. Il suffit de vous entraîner à visualiser (mentalement dès que possible) la relation fondamentale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (que tout le monde connaît sans la moindre hésitation) et à écrire directement le résultat obtenu après division par $\cos^2\theta$.

Exercice 27 :

Supposons $\cos x = \frac{1}{3}$· Comme $\cos x \neq 0$, alors $\tan x$ est défini et l'on peut alors écrire :

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 9$$

ce qui donne $\tan x = \pm 2\sqrt{2}$. L'hypothèse $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donne $\tan x \geqslant 0$, et donc :

$$\tan x = 2\sqrt{2}.$$

Exercice 28 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin x = -\frac{1}{5}$· Comme $\sin x \neq \pm 1$, alors $\tan x$ est défini et l'on a :

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{25}{24}$$

et donc $\tan^2 x = \frac{1}{24}$, ce qui entraîne : $\tan x = \pm\frac{\sqrt{6}}{12}$·

Comme $\sin x$ et $\tan x$ sont de même signe sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit :

$$\tan x = -\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot$$

Exercice 29 :

On a déjà vu que $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$.

Quant aux autres valeurs :

- les réels $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$ correspondent à des arcs supplémentaires, et donc :

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1.$$

- les réels $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{5\pi}{4}$ diffèrent de π, et donc :

$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

Exercice 30 :

Avec la même démarche que dans l'exercice précédent, on obtient :

$$\cos\frac{2\,\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{2\,\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{2\,\pi}{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

ainsi que

$$\cos\frac{4\,\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{4\,\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{4\,\pi}{3} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Exercice 31 :

Considérons l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin\theta \end{array}$

- D'après ce qui précède, on a :

$$\forall\theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}]\quad f(\theta)=\cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta)-\sin\theta=0.$$

- Soit $\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(\pi-\theta) &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\sin(\pi-\theta) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\sin(\theta) \\ &= f(\theta). \end{aligned}$$

  Comme $\pi-\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, on a $f(\pi-\theta)=0$. On en déduit :

$$\forall\theta\in[0,\pi]\quad f(\theta)=0.$$

- Soit $\theta\in[\pi,2\,\pi]$. Alors :

$$f(\theta-\pi)=\cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta+\pi)-\sin(\theta-\pi)=-f(\theta).$$

  Comme $\theta-\pi\in[0,\pi]$, on a $f(\theta-\pi)=0$. On en déduit :

$$\forall\theta\in[0,2\,\pi]\quad f(\theta)=0.$$

- Comme la fonction f est évidemment de période $2\,\pi$, on en déduit que f est nulle.

Par suite on a :
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta.$$

Exercice 32 :

Pour pouvoir écrire le membre de droite de cette relation, il faut

- que $\tan\theta$ soit défini et donc que $\theta \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\ k\in\mathbb{Z}\}$;
- que $\tan\theta$ soit non nul et donc que $\theta \notin \{k\pi\,;\ k\in\mathbb{Z}\}$;

Par suite il faut $\theta \in \mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2}\,;\ k\in\mathbb{Z}\}$ ou encore $\theta \not\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

Réciproquement supposons $\theta \in \mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2}\,;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Alors

- $\tan\theta$ est défini et non nul ;
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ est défini puisqu'alors $\theta-\frac{\pi}{2}\not\equiv 0\ [\frac{\pi}{2}]$ et donc $\theta-\frac{\pi}{2}\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Sous ces hypothèses, on a alors :
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}.$$

Exercice 33 :

1. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a :
$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
et :
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta.$$
2. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a :
$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
et
$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta.$$

Exercice 34 :

1. Soit $\theta\not\equiv 0\ [\pi]$. On a alors :
$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$
On a de même :
$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ou encore $\theta \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$. On a alors :

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \frac{1}{\tan(-\theta)} = -\frac{1}{\tan\theta}.$$

On a de même :

$$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{1}{\tan\theta}.$$

Exercice 35 :

- Pour $\varphi = 0$, l'équation s'écrit $\cos\theta = 1$ et il est évident (avec le cercle trigonométrique) qu'elle a pour ensemble de solutions :

$$S = \{2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

ce qui, avec les notations du début de ce chapitre, correspond au seul point A.

- Pour $\varphi = \pi$, l'équation s'écrit $\cos\theta = -1$ et il est évident qu'elle a pour ensemble de solutions :

$$S = \{(2\,k+1)\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

ce qui, avec les notations du début de ce chapitre, correspond au seul point C.

- Dans le cas général où $\varphi \in \left]0,\pi\right[$, l'équation $\cos\theta = \cos\varphi$ est équivalente à :

$$\theta \equiv \varphi\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\varphi\ [2\,\pi]$$

ce qui donne au plus deux points sur le cercle trigonométrique.

Supposons que ces deux points soient confondus. On aurait alors :

$$\varphi \equiv -\varphi\ [2\pi] \quad \text{et donc} \quad \varphi \equiv 0\ [\pi],$$

ce qui est exclu puisque $\varphi \in \left]0,\pi\right[$.

Si problème avec la division de congruence voir la méthode page 6.

Remarque Dans le cas où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, l'équation s'écrit $\cos\theta = 0$ et il est évident (avec le cercle trigonométrique) qu'elle a pour ensemble de solutions :

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ce qui, avec les notations du début de ce chapitre, correspond aux points B et D.

Exercice 36 :

- Pour $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, l'équation s'écrit $\sin\theta = 1$ et l'on sait (le visualiser évidemment sur le cercle trigonométrique) qu'elle a pour ensemble de solutions :

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dans ce cas, θ est solution de l'équation si, et seulement si, $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$.

- Pour $\varphi \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, l'équation s'écrit $\sin\theta = -1$ et l'on sait (le visualiser évidemment sur le cercle trigonométrique) qu'elle a pour ensemble de solutions :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dans ce cas, θ est solution de l'équation si, et seulement si, $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$.

- On peut résumer les deux cas précédents sous une seule forme.
Pour $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, le réel θ est solution de l'équation $\sin\theta = \sin\varphi$ si, et seulement si :

$$\theta \equiv \varphi \quad [2\pi],$$

ce qui donne un seul point sur le cercle trigonométrique.

- Dans le cas où $\varphi \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ l'équation $\sin\theta = \sin\varphi$ est équivalente à :

$$\theta \equiv \varphi\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \pi - \varphi\ [2\,\pi],$$

ce qui donne au plus deux points sur le cercle trigonométrique.
Supposons que les deux points précédemment trouvés soient confondus. On aurait alors :

$$\varphi \equiv \pi - \varphi\ [2\pi] \quad \text{et donc} \quad \varphi \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi],$$

ce qui est exclu dans ce cas.
Si problème avec la division de congruence voir la méthode page 6.

Remarque Lorsque $\varphi \equiv 0\ [\pi]$, l'équation s'écrit :

$$\sin\theta = 0.$$

Ainsi, θ en est solution si, et seulement si : $\theta \equiv 0\,[\pi]$.

Exercice 37 :

Ici, comme on utilise $\tan\varphi$, il faut évidemment supposer que φ est élément de :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$\varphi \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi].$$

Et, pour la même raison, θ prend aussi ses valeurs dans $\mathcal{D}$.

Pour tout élément $\varphi \in \mathcal{D}$, l'équation $\tan\theta = \tan\varphi$ est équivalente à :

$$\theta \equiv \varphi\ [\pi]$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\theta \equiv \varphi\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \varphi + \pi\ [2\pi].$$

Comme :

$$\varphi + \pi \not\equiv \varphi\,[2\pi]$$

cela correspond toujours à deux points distincts sur le cercle trigonométrique.

Exercice 38 :

- Si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ alors on a $\sin\theta = \pm 1$ ainsi que $\cos\theta = 0$, et une telle valeur de θ ne peut donc pas être solution de l'équation donnée.
- Supposons donc $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou encore :

$$\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Alors on a $\cos\theta \neq 0$ et l'équation donnée est équivalente à :

$$\tan\theta = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation précédente est donc :

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\,\pi\,;\ \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 39 :

L'équation proposée $\sin\theta = \cos 2\,\theta$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'écrit encore :

$$\cos 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \qquad (*)$$

Par suite, un réel θ est solution de $(*)$ si, et seulement si, on a :

- soit :

$$2\theta \equiv \frac{\pi}{2} - \theta\ [2\,\pi],$$

ce qui donne : $3\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\,\pi]$ ou encore :

$$\theta \equiv \frac{\pi}{6} \quad \left[\frac{2\,\pi}{3}\right],$$

- soit :

$$2\theta \equiv -\frac{\pi}{2} + \theta\ [2\,\pi],$$

ce qui donne : $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\,\pi]$.

La fonction $\theta \mapsto \sin\theta - \cos 2\,\theta$ étant de période $2\,\pi$, on peut caractériser l'ensemble S des solutions de $(*)$ par son intersection avec $[0, 2\,\pi]$ qui est :

$$S_0 = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\,\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Cela correspond à 3 points sur le cercle trigonométrique.

Exercice 40 :

L'équation proposée $\sin\theta\,\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'écrit aussi :

$$\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\theta = 0. \qquad (*)$$

Étant donné qu'un produit de deux réels est nul si, et seulement si, l'un des deux est nul, un réel θ est solution de $(*)$ si, et seulement si, on a :

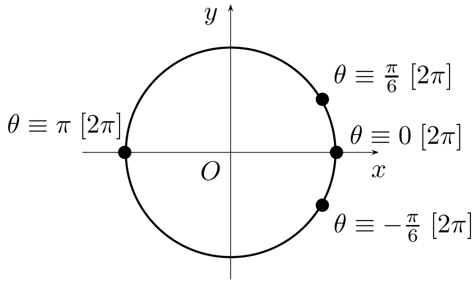
- soit $\sin\theta = 0$, ce qui est équivalent à $\theta \equiv 0\ [\pi]$;

- soit $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, ce qui est équivalent à $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

D'après ce qui précède, θ est solution de l'équation si, et seulement si :

$$\theta \equiv 0\ [\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

ce qui correspond à 4 points sur le cercle trigonométrique



puisque la condition ci-dessus peut s'écrire :

$$\theta \equiv 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \pi\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

Exercice 41 :

Comme l'expression polynomiale $2\,u^2 - 3\,u + 1$ s'annule pour $u = 1$, on peut écrire :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad 2\,\cos^2\theta - 3\,\cos\theta + 1 = (\cos\theta - 1)\,(2\,\cos\theta - 1)\,.$$

Par suite, θ est solution de l'équation donnée si, et seulement si, on a :

- soit $\cos\theta = 1$, ce qui est équivalent à $\theta \equiv 0\ [2\,\pi]$;
- soit $\cos\theta = \frac{1}{2}$, ce qui est équivalent à $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Par suite, θ est solution de l'équation donnée si, et seulement si :

$$\theta \equiv 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

ce qui correspond à 3 points sur le cercle trigonométrique.

Exercice 42 :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 3\,\sin\theta - \cos^2\theta + 3 &= 3\,\sin\theta - (1 - \sin^2\theta) + 3 \\ &= \sin^2\theta + 3\,\sin\theta + 2 \\ &= (\sin\theta + 1)\,(\sin\theta + 2). \end{aligned}$$

Comme :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \sin\theta + 2 \geqslant 1,$$

l'équation donnée a les mêmes solutions que l'équation :

$$\sin\theta = -1$$

ce qui équivaut à :

$$\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Exercice 43 :

Soit $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$ ou encore $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

- Comme le point S_θ se trouve sur la parallèle à Ox issue de B, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de S_θ soient $(x, 1)$.

- Étant donné que les points 0, M_θ et S_θ sont alignés et que le vecteur $\overrightarrow{OM}_\theta$ est non nul, on peut trouver $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OS_\theta} = k\,\overrightarrow{OM}_\theta$, ce qui donne pour les coordonnées :

$$x = k\,\cos\theta \quad \text{et} \quad 1 = k\,\sin\theta.$$

On en déduit immédiatement $k = \frac{1}{\sin\theta}$ et donc $x = \cot\theta$.

Exercice 44 :

Pour $\theta \not\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, on a évidemment :

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}\cdot$$

Exercice 45 :

Supposons $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$. En divisant la relation fondamentale :

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

par $\sin^2\theta$ qui est alors non nul, on obtient :

$$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot$$

Exercice 46 :

Soit θ et φ deux réels donnés. Dans le plan, rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, considérons les vecteurs :

$$u = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{et} \quad v = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$

- Avec ces notations, les réels θ et φ sont des mesures respectivement de l'angle orienté $(\widehat{Ox, u})$ et de l'angle orienté $(\widehat{Ox, v})$.

- D'après la relation de Chasles, on a :

$$(\widehat{u, v}) = (\widehat{Ox, v}) - (\widehat{Ox, u})$$

  et $\varphi - \theta$ est donc une mesure de l'angle orienté $(\widehat{u, v})$.

- Comme les vecteurs u et v sont de norme 1, on a :

$$u \cdot v = \cos(u, v) = \cos(\varphi - \theta).$$

- En utilisant les composantes de u et v dans repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on obtient :

$$u \cdot v = \cos\theta\ \cos\varphi + \sin\theta\ \sin\varphi.$$

On en déduit :
$$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\,\cos\varphi + \sin\theta\,\sin\varphi.$$

Exercice 47 :

Une relation sur les angles complémentaires donne :
$$\sin(\theta - \varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \varphi\right).$$

En utilisant la relation (i), on obtient :
$$\cos\left((\frac{\pi}{2} - \theta) + \varphi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos\varphi - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin\varphi$$

et donc :
$$\sin(\theta - \varphi) = \sin\theta\,\cos\varphi - \cos\theta\,\sin\varphi.$$

Exercice 48 :

Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. On sait que :
$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= e^{i\,\theta}\,e^{i\,\varphi} \\ &= (\cos\theta + i\,\sin\theta)\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi). \end{aligned}$$

En prenant les parties réelles puis imaginaires du membre de gauche et du membre de droite (que l'on s'efforce de développer de tête), on obtient directement les deux formules :
$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\,\cos\varphi - \sin\theta\,\sin\varphi$$

et
$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\,\cos\varphi + \cos\theta\,\sin\varphi.$$

Exercice 49 :

Posons $M = \sqrt{a^2 + b^2}$. Étant donné que les réels a et b ne sont pas nuls tous les deux, on a donc $M \neq 0$ et l'on peut poser :
$$\alpha = \frac{a}{M} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{M} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, on peut trouver un réel φ tel que :
$$\sin\varphi = \alpha \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \beta.$$

Avec ces notations, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a alors :
$$f(\theta) = M\,(\sin\varphi\,\cos\theta + \cos\varphi\,\sin\theta) = M\,\sin(\theta + \varphi).$$

Exercice 50 :

- **Méthode 1 (si l'on tombe directement sur ce problème) :** Posons $M' = \sqrt{a^2+b^2}$. Étant donné que a et b ne sont pas tous deux nuls , on a $M' \neq 0$ et l'on peut poser :

$$\alpha = \frac{a}{M'} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{M'} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

  Comme $\alpha^2+\beta^2=1$, on peut trouver un réel φ tel que :

$$\cos\varphi = \alpha \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \beta.$$

  Posons $\varphi' = -\varphi$. Avec ces notations, on a :

$$\alpha = \cos\varphi' \quad \text{et} \quad \beta = -\sin\varphi'.$$

  Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$f(\theta) = M\,(\cos\varphi'\,\cos\theta - \sin\varphi'\,\sin\theta) = M'\,\cos(\theta+\varphi').$$

- **Méthode 2 (en utilisant l'exercice précédent) :** D'après l'exercice précédent, on sait qu'il existe $(M,\varphi) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = M\,\sin(\theta+\varphi).$$

  Posons $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$f(\theta) = M\,\sin\left(\theta+\varphi'-\frac{\pi}{2}\right) = -M\,\cos(\theta+\varphi'),$$

  ce qui prouve le résultat en prenant $M' = -M$.

Exercice 51 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right) + 2 \\ &= 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta\right) + 2 \\ &= 2\,\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) + 2. \end{aligned}$$

Par suite, on a $f(\theta) = 0$ si, et seulement si :

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = -1,$$

c'est-à-dire et seulement si :

$$\theta + \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

ou encore :

$$\theta \equiv -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi].$$

Exercice 52 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3\cos\theta + \sin\theta + 2 \\ &= \sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{10}}\sin\theta\right) + 2. \end{aligned}$$

Comme $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1$, on peut trouver un réel φ tel que :

$$\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot$$

On a ainsi :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \sqrt{10}\,\sin(\theta + \varphi) + 2.$$

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant \sin(\theta+\varphi) \leqslant 1$ et donc :

$$2 - \sqrt{10} \leqslant f(\theta) \leqslant 2 + \sqrt{10}.$$

- Comme :

$$2 - \sqrt{10} = f\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad 2 + \sqrt{10} = f\left(-\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

  on en déduit :

$$\min f = 2 - \sqrt{10} \quad \text{et} \quad \max f = 2 + \sqrt{10}.$$

Exercice 53 :

Comme $\theta + \varphi \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a :

$$\tan(\theta+\varphi) = \frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)} = \frac{\sin\theta\,\cos\varphi + \sin\varphi\,\cos\theta}{\cos\theta\,\cos\varphi - \sin\theta\,\sin\varphi}\cdot$$

Comme $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\varphi \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a :

$$\cos\theta\,\cos\varphi \neq 0$$

et l'on peut donc diviser numérateur et dénominateur par $\cos\theta\,\cos\varphi$, ce qui donne :

$$\tan(\theta+\varphi) = \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta\,\tan\varphi}\cdot$$

Exercice 54 :

- Si $m\,m' = -1$, alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires et l'angle $(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{D}'})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ modulo π.
- Sinon, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tan(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{D}'}) &= \tan\left((\widehat{Ox,\mathcal{D}'}) - (\widehat{Ox,\mathcal{D}})\right) \\ &= \frac{\tan(\widehat{Ox,\mathcal{D}'}) - \tan(\widehat{Ox,\mathcal{D}})}{1 + \tan(\widehat{Ox,\mathcal{D}'})\,\tan(\widehat{Ox,\mathcal{D}})} \\ &= \frac{m' - m}{1 + m\,m'}\cdot \end{aligned}$$

Exercice 55 :

- La droite $\mathcal{D}_1$, d'équation $3\,x - y + 1 = 0$, a pour pente 3 et donc :

$$\tan\,(\widehat{Ox, \mathcal{D}_1}) = 3\ ;$$

- La droite $\mathcal{D}_2$, d'équation $4\,x + 2\,y - 5 = 0$, a pour pente -2 et donc :

$$\tan\,(\widehat{Ox, \mathcal{D}_2}) = -2.$$

Comme le produit de ces pentes est différent de -1, ces deux droites ne sont pas perpendiculaires et $\tan\,(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2})$ existe. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\tan\,(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2}) &= \tan\Big((\widehat{Ox, \mathcal{D}_2}) - (\widehat{Ox, \mathcal{D}_1})\Big) \\
&= \frac{\tan\,(\widehat{Ox, \mathcal{D}_2}) - \tan\,(\widehat{Ox, \mathcal{D}_1})}{1 + \tan\,(\widehat{Ox, \mathcal{D}_1})\ \tan\,(\widehat{Ox, \mathcal{D}_2})} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Par suite, $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2})$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ modulo π.

Exercice 56 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la relation :

$$\sin(2\,u) = 2\sin u\ \cos u,$$

on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \cos\theta\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\sin\left(\frac{\theta}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ \cos\theta\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\ \cos\theta\ \sin\theta \\
&= \frac{1}{8}\ \sin 2\,\theta.
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\min f = -\frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \max f = \frac{1}{8}\cdot$$

Remarque Une telle transformation sera aussi la bienvenue le jour où l'on aura à calculer des dérivées successives de la fonction f.

Exercice 57 :

Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. On a

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos\theta)$$

et donc
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}.$$

Comme $\dfrac{\theta}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$ et donc :
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}.$$

Exercice 58 :

- Avec les hypothèses, on peut utiliser la formule permettant de développer $\tan(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})$ et on obtient directement :
$$\tan\theta = \frac{2\,\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2\,t}{1-t^2}.$$
- Pour tout θ réel, on a :
$$\cos\theta = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$
Comme $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$ et donc $\dfrac{\theta}{2} \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a $\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \neq 0$,
ce qui permet d'écrire :
$$\cos\theta = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$
Étant donné que :
$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$
on en déduit :
$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
- Pour $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a :
$$\sin\theta = \tan\theta\,\cos\theta.$$
Si de plus $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$, alors $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est défini et l'on a :
$$\sin\theta = \frac{2t}{1-t^2}\,\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$
Pour terminer, il suffit de vérifier que cette formule reste vraie pour $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, ce qui est immédiat puisqu'alors :
  - si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, on a $\sin\theta = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$,
  - si $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, on a $\sin\theta = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -1$.

Exercice 59 :

Posons $t = \tan\frac{\pi}{8}$. Comme $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, on a :

$$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\,\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} = \frac{2\,t}{1-t^2}.$$

On en déduit :

$$t^2 + 2\,t - 1 = 0$$

et donc :

$$(t+1)^2 - 2 = 0$$

ce qui entraîne :

$$t = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan\frac{\pi}{8} > 0$ et donc :

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

Exercice 60 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Posons :

$$f(\theta) = \sin\theta\,\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta + \frac{2\,\pi}{3}\right).$$

Comme :

$$\begin{aligned} 2\,\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta + \frac{2\,\pi}{3}\right) &= \cos\frac{\pi}{3} - \cos(2\,\theta + \pi) \\ &= \frac{1}{2} + \cos(2\,\theta), \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{4}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\,\cos(2\,\theta) \\ &= \frac{1}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}\big(\sin(3\,\theta) - \sin\theta\big) \\ &= \frac{1}{4}\sin(3\,\theta). \end{aligned}$$

Par suite, le réel $k = 4$ convient et donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(3\,\theta) = 4\,\sin\theta\,\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta + \frac{2\,\pi}{3}\right).$$

Exercice 61 :

Soit θ et φ deux réels donnés. Posons :

$$u = \frac{\theta + \varphi}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{\theta - \varphi}{2}.$$

On a alors :

$$\theta = u + v \quad \text{et} \quad \varphi = u - v.$$

- **Pour les sommes et différences de cosinus**

  On peut alors écrire :

$$\cos\theta = \cos(u+v) = \cos u\,\cos v - \sin u\,\sin v \qquad (i)$$

  ainsi que :

$$\cos\varphi = \cos(u-v) = \cos u\,\cos v + \sin u\,\sin v. \qquad (ii)$$

  En faisant le somme des de (i) et (ii), on obtient :

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\,\cos u\,\cos v = 2\,\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right).$$

  En retranchant (ii) à (i), on obtient :

$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\,\sin u\,\sin v = -2\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right).$$

- **Pour les sommes et différences de sinus**

  De même, on peut écrire :

$$\sin\theta = \sin(u+v) = \sin u\,\cos v + \sin v\,\cos u \qquad (i)$$

  ainsi que :

$$\sin\varphi = \sin(u-v) = \sin u\,\cos v - \sin v\,\cos u \qquad (ii)$$

  En faisant la somme de (i) et de (ii), on obtient :

$$\sin\theta + \sin\varphi = 2\,\sin u\,\cos v = 2\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right).$$

  En retranchant (ii) à (i), on obtient :

$$\sin\theta - \sin\varphi = 2\,\sin v\,\cos u = 2\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right).$$

Exercice 62 :

Si dans la relation :

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right),$$

on remplace φ par $\pi-\varphi$, on obtient :

$$\cos\theta - \cos\varphi = 2\,\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après les formules concernant les angles complémentaires et les angles différant de $\frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right).$$

Exercice 63 :

1. Pour θ et φ réels, on a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}+e^{i\varphi} &= e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}+e^{i\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)\\ &= e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\varphi}{2}}\right)\\ &= 2\,e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

   On a de même :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}-e^{i\varphi} &= e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}-e^{i\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)\\ &= e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\theta-\varphi}{2}}\right)\\ &= 2\,i\,e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

2. Pour θ et φ réels, on a :

$$\begin{aligned} \cos\theta+\cos\varphi &= \mathrm{Re}(e^{i\theta})+\mathrm{Re}(e^{i\varphi})\\ &= \mathrm{Re}(e^{i\theta}+e^{i\varphi}). \end{aligned}$$

   Or :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}+e^{i\varphi} &= e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}+e^{i\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)\\ &= 2\,e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

   Comme $2\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\in\mathbb{R}$, la partie réelle de ce qui précède est :

$$2\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\right)=2\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right).$$

   On en déduit :

$$\cos\theta+\cos\varphi=2\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right).$$

   De même, pour θ et φ réels, on a :

$$\begin{aligned} \cos\theta-\cos\varphi &= \mathrm{Re}(e^{i\theta})-\mathrm{Re}(e^{i\varphi})\\ &= \mathrm{Re}(e^{i\theta}-e^{i\varphi}). \end{aligned}$$

   Or :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}-e^{i\varphi} &= e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}-e^{i\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)\\ &= 2\,i\,e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

   Comme $2\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\in\mathbb{R}$, la partie réelle de ce qui précède est :

$$-2\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\right)=-2\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right).$$

   On en déduit :

$$\cos\theta-\cos\varphi=-2\,\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right).$$

3. Pour θ et φ réels, on a :

$$\begin{aligned}\sin\theta+\sin\varphi &= \mathrm{Im}(e^{i\theta})+\mathrm{Im}(e^{i\varphi})\\ &= \mathrm{Im}(e^{i\theta}+e^{i\varphi}).\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}e^{i\theta}+e^{i\varphi} &= e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}+e^{i\frac{\varphi-\theta}{2}}\right)\\ &= 2\,e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right).\end{aligned}$$

Comme $2\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\in\mathbb{R}$, la partie imaginaire de ce qui précède est :

$$2\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\right)=2\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right).$$

On en déduit :

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\,\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right).$$

La dernière relation s'en déduit en changeant φ en $-\varphi$.

Exercice 64 :

Soit $\theta\in\,]0,\frac{\pi}{6}[$. En posant $D=\sin 2\theta-\sin 4\theta+\sin 6\theta$, on a :

$$\begin{aligned}D &= -2\,\sin\theta\,\cos 3\theta+\sin 6\theta\\ &= 2\cos 3\theta\,(-\sin\theta+\sin 3\,\theta)\,.\end{aligned}$$

De même, en posant $N=1-\cos 2\theta+\cos 4\theta-\cos 6\theta$, on a :

$$\begin{aligned}N &= 1-\cos 6\theta-(\cos 2\theta-\cos 4\theta)\\ &= 2\,\sin^2 3\theta-2\sin\theta\,\sin 3\theta\\ &= 2\,\sin 3\theta\,(\sin 3\theta-\sin\theta)\,.\end{aligned}$$

- Étant donné que :

$$D=2\cos 3\theta\,(-\sin\theta+\sin 3\,\theta)=4\,\cos 3\theta\,\sin\theta\cos 2\theta$$

et que :

$$0<\theta\leqslant 2\theta\leqslant 3\theta<\frac{\pi}{2},$$

il est immédiat que $D\neq 0$ et que N/D est défini.

- En utilisant les deux premières formes factorisées, on déduit :

$$\frac{1-\cos 2\theta+\cos 4\theta-\cos 6\theta}{\sin 2\theta-\sin 4\theta+\sin 6\theta}=\frac{N}{D}=\tan 3\,\theta.$$

Exercice 65 :

En factorisant chacun des deux membres, l'équation s'écrit :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\,\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\,\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\,\theta}{2}\right)$$

ou encore :

$$\sin\left(\frac{3\,\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\,\theta}{2}\right)\right) = 0.$$

L'équation donnée se décompose donc, et un réel θ en est solutions si, et seulement si, on a :

- soit $\sin\frac{3\,\theta}{2} = 0$, ce qui donne :

$$\theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right] ;$$

- soit $\cos\frac{3\,\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$; il y a alors deux possibilités :
  - $*$ d'une part $\frac{3\,\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$, ce qui donne :

$$\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi] ;$$

  - $*$ d'autre part $\frac{3\,\theta}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$, ce qui donne :

$$\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Par suite l'ensemble des solutions dans $[0, 2\pi[$ de l'équation donnée est :

$$S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\,\pi}{3}, \frac{5\,\pi}{4}, \frac{4\,\pi}{3}, \frac{3\,\pi}{2}\right\}.$$